Утверждено
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2020 г.

Программа

по дисциплине: **Кратные интегралы и теория поля**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **физики и исследований им. Ландау**
факультет: **ЛФИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

Трудоёмкость:
Базовая часть — 4 зач. ед.;
лекции — 45 часов
практические занятия — 45 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 3 семестр

Всего аудиторных часов — 90

Самостоятельная работа:
60 часов

Составитель программы:
д. ф.-м. н., профессор Р. Н. Карасёв

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 11 апреля 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Свёртка и приближение функций бесконечно гладкими

1. Свёртка функций и её ассоциативность. Дифференцирование свёртки.
2. Бесконечно гладкие функции с компактным носителем, примеры.
3. Приближение функции в $\mathbb{R}^n$ (вместе с производными) бесконечно гладкими функциями.

Дифференцируемые отображения и криволинейные системы координат

4. Дифференцируемые отображения и производная композиции отображений.
5. Теорема о существовании обратного отображения. Локальные системы криволинейных координат.
6. Теорема о системе неявных функций, определяемых системой уравнений (случай гладких уравнений).
7. Теорема о расщеплении гладкого отображения на простые гладкие отображения.

Дифференциал, гессиан и исследование функции на экстремум

8. Дифференциал функции как линейный функционал. Корректность определения второго дифференциала (гессиана) функции как квадратичной формы на касательных векторах для случая, когда первый дифференциал функции равен нулю.
9. Локальные максимумы и минимумы функций многих переменных. Необходимое условие экстремума непрерывно дифференцируемой функции.
10. Необходимые и достаточные условия экстремума дважды непрерывно дифференцируемых функций.
11. Условные экстремумы. Необходимое условие условного экстремума в терминах первых производных. Метод множителей Лагранжа.
12. Необходимые и достаточные условия условного экстремума с использованием вторых производных.

Векторы и дифференциальные формы первой степени

13. Касательные векторы к открытому подмножеству $\mathbb{R}^n$ в точке. Определение через дифференцирование функций в точке и явный вид.
14. Касательное пространство в точке и дифференциал отображения как отображение касательных пространств. Векторные поля на открытых областях в $\mathbb{R}^n$.
15. Дифференциальные формы первой степени и дифференциалы функций. Замена координат в дифференциальной форме первой степени.

Дифференциальные формы высших степеней

16. Дифференциальные формы произвольной степени на открытых множествах в $\mathbb{R}^n$, их определение и свойства.

17. Внешнее умножение дифференциальных форм, нормировка внешнего умножения и координатная запись дифференциальных форм произвольной степени.
18. Оператор внешнего дифференцирования d, его аксиоматические свойства, существование, единственность и независимость от выбора криволинейной системы координат в области в $\mathbb{R}^n$.
19. Замена координат в дифференциальной форме и обратный образ дифференциальной формы при гладких отображениях, якобиан замены переменных с точки зрения дифференциальных форм.

Интегрирование дифференциальных форм

20. Интегрирование дифференциальной формы n-й степени с компактным носителем по $\mathbb{R}^n$. Равенство нулю интеграла дифференциала формы с компактным носителем.
21. Представление формы n-й степени с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$ в каноническом виде с точностью до дифференциала формы с компактным носителем.
22. Гладкое разбиение единицы в окрестности компактного подмножества $\mathbb{R}^n$, подчинённое покрытию этого подмножества.
23. Поведение интеграла от формы с компактным носителем в области $\mathbb{R}^n$ при линейной замене координат.
24. Поведение интеграла от формы с компактным носителем в области $\mathbb{R}^n$ при гладкой замене координат.
25. Формула гладкой замены переменных в интеграле Лебега от функции в $\mathbb{R}^n$.

Многообразия (с краем) и формула Стокса

26. Вложенные многообразия в $\mathbb{R}^N$ и вложенные многообразия с краем. Достаточные условия, когда система уравнений задаёт многообразие.
27. * Абстрактное определение гладкого многообразия. Координатные карты, гладкие функции на многообразии и гладкие отображения между многообразиями.
28. Дифференциальные формы, векторные поля и оператор d на многообразии.
29. Гладкие отображения между многообразиями и параметрически заданные многообразия в $\mathbb{R}^N$.
30. Гладкое разбиение единицы в окрестности компактного подмножества многообразия, подчинённое покрытию этого подмножества.
31. * Гладкое локально конечное разбиение единицы всего многообразия, подчинённое его покрытию.

32. Ориентируемость многообразия в терминах карт, задание ориентации многообразия дифференциальной формой высшей степени. Связь ориентации многообразия и его края.
33. Определение интеграла дифференциальной формы по ориентированному многообразию с помощью разбиения единицы и его независимость от разбиения единицы.
34. Общая формула Стокса.
35. Явный вид частных случаев формулы Стокса в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Кусочно-гладкие ориентированные поверхности.
36. Независимость интеграла дифференциальной формы по кривой на многообразии от пути интегрирования и существование потенциала дифференциальной формы. Необходимое условие существования потенциала.

Элементы дифференциальной топологии

37. Замкнутые и точные дифференциальные формы, оператор цепной гомотопии для обратных образов дифференциальных форм.
38. Определение когомологий де Рама с произвольным и компактным носителем. Когомологии де Рама $\mathbb{R}^n$ и выпуклых областей в $\mathbb{R}^n$.
39. * Когомологии де Рама с компактным носителем в степени n для n-мерного связного многообразия.
40. * Критические и регулярные значения гладкого отображения, теорема Сарда.
41. * Геометрическое определение степени собственного отображения и его корректность.
42. * Определение степени отображения между ориентированными многообразиями с помощью интегрирования форм максимальной степени с компактным носителем.
43. Теорема Брауэра о неподвижной точке.
44. * Существование нигде не нулевых векторных полей на сфере.

Дифференцирование и интегрирование векторных полей

45. Внутреннее дифференцирование и производная Ли дифференциальной формы по векторному полю.
46. Производная Ли векторного поля и её свойства. Скобка Ли векторных полей, формула для её вычисления в координатах, её кососимметричность и тождество Якоби.
47. Интегрирование векторных полей как решение дифференциального уравнения первого порядка. Выпрямление траекторий и достаточные условия неограниченного продолжения решения дифференциального уравнения на многообразии.
48. Однопараметрические группы диффеоморфизмов многообразия, геометрический смысл производной Ли по векторному полю.

49. Дивергенция векторного поля на многообразии с формой объёма, её геометрический смысл.

Римановы и полуримановы многообразия

50. Риманова структура на многообразии, её существование.
51. Риманов объём, произведение римановых многообразий и риманов объём на произведении.
52. Риманов объём многообразий в евклидовом пространстве с индуцированной римановой структурой. Формула риманова объёма двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ с векторным произведением.
53. Скалярное произведение на произвольных тензорах и определение оператора $*$ для дифференциальных форм.
54. Выражение оператора $*$ в евклидовом пространстве для ортонормированных и сферических координат. Выражение дивергенции, градиента и ротора в $\mathbb{R}^3$ через оператор $*$, выражение лапласиана в сферических координатах.
55. Ковариантное дифференцирование, его аксиоматические свойства. Формула Козюля и существование ковариантного дифференцирования.
56. Длина кривой на римановом многообразии и действие кривой. Определение метрики на римановом многообразии.
57. Геодезические и их уравнение. Перенос вектора вдоль кривой с помощью ковариантного дифференцирования.
58. * Тензор кривизны Римана, его свойства симметрии и геометрический смысл. Тензор Риччи и скалярная кривизна.
59. Пространство-время специальной теории относительности, его геодезические и изометрии.
60. Движение в электромагнитном поле, дифференциальная форма электромагнитного поля, инвариантный вид уравнений Максвелла.
61. Риманова структура на сфере, её геодезические, изометрии и кривизна.
62. Риманова структура в гиперболическом пространстве, его геодезические, изометрии и кривизна.
63. Полуриманова структура в пространстве де Ситтера и анти-пространстве де Ситтера, описание световых лучей.
64. Метрика Шварцшильда и описание радиальных световых лучей в ней.

Площадь поверхности по Минковскому и изопериметрическое неравенство

65. * Площадь поверхности по Минковскому для гиперповерхностей, её равенство риманову объёму.
66. * Риманов объём n-мерной сферы.
67. * Неравенство Брунна–Минковского, логарифмическое и функциональное неравенство Брунна–Минковского.

68. * Изопериметрическое неравенство для площади поверхности Минковского.

Литература

Основная

1. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа. rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf

Дополнительная

2. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. — Москва : Мир, 1987.
3. *Стернберг Ш.* Лекции по дифференциальной геометрии. — Москва : Мир, 1970.
4. *Sternberg S.* Curvature in Mathematics and Physics. — Dover Publications, 2012.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Т. 3. Функции нескольких переменных: учебное пособие / под ред. Л. Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003.

Замечание. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендуется разобрать на семинарских занятиях. Если задача с подчёркнутым номером была разобрана, то студент не обязан записывать её решение в домашнее задание.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 30 сентября – 5 октября)

I. Гамма и бета функция

Т.1. Определите, при каких значениях параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ интегралы конечны, и выразите их через гамма-функцию

а) $\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x^\beta}\,dx$; <u>б)</u> $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,dx$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{(1+x^\beta)}\,dx$; <u>г)</u> $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x\,dx$.

Т.2. Докажите, что

а) $\Gamma(p) \sim \frac{1}{p}$ при $p \to +0$; <u>б)</u> $\Gamma(p)$ строго выпукла при $p > 0$.

II. Интегралы без криволинейной замены координат

Т.3. Вычислите интегралы

а) $\int\limits_0^\pi dy \int\limits_y^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx$; б) $\int\limits_{0\leqslant x_1,\ldots,x_n\leqslant a} e^{c_1x_1+\cdots+c_nx_n}\, dx_1\ldots dx_n$;

в) $\int\limits_{0\leqslant x_1,\ldots,x_n\leqslant a} (x_1+\cdots+x_n)^2\, dx_1\ldots dx_n$; г) $\int\limits_{0\leqslant x_1\leqslant\ldots\leqslant x_n\leqslant a} 1\, dx_1\ldots dx_n$.

Т.4. Выразите кратный интеграл через однократный для измеримой функции f

а) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y f(z)\, dz$; б) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2} f(x+y+z)\, dxdydz$;

в) $\int\limits_{x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2} f\left(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right)\, dx_1\ldots dx_n$.

Т.5. Найдите объём четырёхмерной фигуры, заданной неравенством

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4\leqslant 1.$$

III. Длина кривой и интегралы по длине

Т.6. Найдите длину кривой ($a, b > 0$ — параметры)

а) $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $0\leqslant x\leqslant b$; б) $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0\leqslant t\leqslant a$.

Т.7. Найдите интегралы по длине кривой ($a > 0$ — параметр)

а) $\int\limits_{x^2+y^2=a^2} y^2\, ds$; б) $\int\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0}} x^2\, ds$.

IV. Гладкие отображения и неявные функции

Т.8. Дано уравнение $x^2 = y^2$

а) Сколько функций $y : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяют этому уравнению?

б) Сколько непрерывных функций $y : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяют этому уравнению?

в) Сколько непрерывных функций $y : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяют этому уравнению и условию $y(1) = 1$?

г) Сколько непрерывных функций $y : [1,2]\to\mathbb{R}$ удовлетворяют этому уравнению и условию $y(1) = 1$?

Т.9. Найдите дифференциал функции $f(x, y)$, заданной неявно соотношением $f^3 - xf + y = 0$, в точке $x = 3$, $y = 2$.

Т.10. Найдите дифференциалы функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$, заданных неявно соотношениями

$$xe^{f+g} + fg = 1, \quad ye^{f-g} - \frac{f}{1+g} = 2x,$$

в точке $x = 1$, $y = 2$ при условии, что $f(1, 2) = g(1, 2) = 0$.

Т.11. Для отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного координатными функциями

$$\begin{cases} u(x, y) = e^x \cos y, \\ v(x, y) = e^x \sin y, \end{cases}$$

покажите, что якобиан отображения отличен от нуля всюду в $\mathbb{R}^2$, но отображение не является взаимно однозначным. Каково множество значений f?

Т.12. Докажите, что всякое гладкое отображение $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, у которого якобиан ни в одной точке не равен нулю, переводит открытые множества в открытые.

Т.13. Докажите, что открытый круг на плоскости $\{x^2 + y^2 < 1\}$ диффеоморфен всей плоскости.

Т.14. Диффеоморфны ли открытый круг $\{x^2+y^2 < 1\}$ и открытый квадрат $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ на плоскости?

Т.15*. Докажите, что если дифференциалы гладких функций $f_1, \dots, f_k$ линейно зависимы в окрестности точки p, а дифференциалы функций $f_2, \dots, f_k$ линейно независимы в p, то в некоторой окрестности точки p функция f_1 выражается через остальные.

Т.16. Перейдите к полярным координатам в выражении

а) $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$; б) $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x}$; в) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Т.17. Перейдите к координатам u, v по формулам $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$ в выражении $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Т.18*. Докажите, что условие $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ сохраняется при любой *конформной* замене координат, то есть замене $(x, y) \to (u, v)$, дифференциал которой в любой точке является ортогональной матрицей, умноженной на ненулевое число.

V. Экстремумы функций нескольких переменных

T.19. Найдите все критические точки явной заданной функции и исследуйте её на экстремум

а) $x^4 + y^4 - 2x^2$, $x, y \in \mathbb{R}$; б) $\sin(x+y+z) - \sin x - \sin y - \sin z$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

T.20. Докажите, что функция $f(x, y) = (y^2 - x)(y^2 - 2x)$ не имеет экстремума в начале координат, но любое её ограничение на прямую, проходящую через начало координат, имеет экстремум в начале координат.

T.21. Исследуйте на экстремум функцию $f(x, y)$, заданную неявно

а) $f^2 + fx + x^2 + xy + y^2 = 1$, $x, y, f \in \mathbb{R}$; б) $f + \sin f = x^2 - y^2$, $x, y, f \in \mathbb{R}$.

T.22. Исследуйте на экстремум данную функцию при данном условии

а) $x+y+z$ при условии $x^2+y^2+z^2 = 1$; б) xyz при условии $x^2+y^2+z^2 = 1$;
в) xyz при условиях $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $x + y + z = 0$;

г) $x^2 + 2y^2 + 2z^2$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$;

д) $Q(\bar{x})$ при условии $|\bar{x}|^2 := x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, где Q — произвольная квадратичная форма, соответствующая симметричной матрице A.

T.23. Исследуйте на условный экстремум функцию $\operatorname{tr} A$ при условии $\det A = 1$, для вещественных симметричных матриц 4×4. Объясните, является ли экстремум строгим.

T.24*. Исследуйте на условный экстремум функцию $\operatorname{tr} A$ при условии $\det A = 1$, для вещественных матриц 3×3.

T.25. Верно ли, что если P — многочлен от n переменных, то $|P(x)|$ достигает своё наименьшее значение на $\mathbb{R}^n$. Рассмотрите разные $n \in \mathbb{N}$.

T.26*. Придумайте гладкую функцию на плоскости, у которой один локальный минимум, один локальный максимум, и значение в точке минимума больше, чем значение в точке максимума.

T.27. Найдите какой-нибудь базис касательного пространства к сфере

$$\mathbb{S}^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

в точке с координатами $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}^2$.

VI. Дифференциальные формы и внешний дифференциал

Т.28. Вычислите внешний дифференциал следующих дифференциальных форм на плоскости без точки $(0,0)$:

а) $xdy - ydx$;

б) $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$;

в) $f(x^2 + y^2)(xdx + ydy)$, где f — гладкая функция одной переменной.

Т.29. Вычислите внешний дифференциал следующих дифференциальных форм в $\mathbb{R}^3$:

а) $xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$;

б) $xydz + yzdx + zxdy$.

Т.30. Запишите дифференциальную форму в $\mathbb{R}^3$ в сферических координатах, если в евклидовых она имеет вид:

а) $dx \wedge dy \wedge dz$;

б) $xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.

(26+4*)

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 4–9 ноября)

I. Интегралы в криволинейных координатах

Т.1. Найдите объёмы тел, заданных неравенствами с параметрами $a, b, c > 0$

а) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$; б) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leqslant az(x^2 + y^2)$.

Т.2. Вычислите интегралы в зависимости от параметров $a, b, c > 0$

а) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{1\leqslant xy\leqslant 3\\ 0<x\leqslant y\leqslant 2x}} y^2\, dxdy$; б) $\displaystyle\iint\limits_{|y/b|\leqslant x/a} e^{-\frac{x^2+y^2}{2c^2}}\, dxdy$;

в) $\displaystyle\iiint\limits_{a^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant b^2} x^2 + y^2 - z^2\, dxdydz$;

г) $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant az} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$; д) $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2\leqslant az\leqslant b^2} z^2\, dxdydz$;

е) $\displaystyle\iiint\limits_{x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2\leqslant 1} x^2 + y^2 + z^2\, dxdydz$.

Т.3. Найдите координаты центра масс однородного тела, заданного неравенствами с параметрами $a, b, c > 0$

а) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant \dfrac{z}{c} \leqslant 1$; б) $\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}} \leqslant \dfrac{z}{c} \leqslant 1$, $x \geqslant 0$.

Т.4. Найдите интеграл по плоскости в зависимости от параметра $a > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2)\, dxdy.$$

Т.5. Определён ли интеграл по плоскости

$$\int_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2+y^2)\, dxdy$$

как интеграл Лебега?

II. Многообразия и криволинейные системы координат

Т.6. Проверьте по определению, является ли множество

а) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

б) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$;

в) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0\}$;

вложенным многообразием или многообразием с краем.

Т.7. При каких условиях на функцию

$$Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

множество её нулей является подмногообразием в $\mathbb{R}^2$?

Т.8. Постройте какой-нибудь координатный атлас на двумерной сфере

$$\mathbb{S}^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Т.9*. Приведите пример двумерного неориентируемого многообразия и объясните, почему оно не может быть ориентировано.

Т.10*. Рассмотрите на $\mathbb{R}^1$ две карты $\varphi_A : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $\varphi_A(x) = x$ и $\varphi_B : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $\varphi_B(x) = x^3$. Проверьте, что они задают две разные гладкие структуры на прямой и приведите пример, когда одна и та же функция является гладкой функцией относительно одной гладкой структуры и не является гладкой функцией относительно другой.

III. Интегралы дифференциальных форм и формула Стокса

Т.11. Вычислите интегралы по кривой с помощью формулы Грина или без ($a, b > 0$ — параметры)

<u>а)</u> $\int\limits_\gamma \frac{xdx + ydy + zdz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, где γ — отрезок от $(1,0,0)$ до $(1,1,1)$;

б) $\int\limits_\gamma (2xy - y)dx + x^2dy$, где γ — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ориентированный против часовой стрелки;

<u>в)</u> $\int\limits_\gamma xdy$, где γ задана уравнением $(x^2+y^2)^2 = ax^3$ и ориентирована против часовой стрелки;

г) $\int\limits_\gamma xdy$, где γ задана уравнением $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12} = xy$ и ориентирована против часовой стрелки.

Т.12. Вычислите интегралы по поверхности с помощью формулы Гаусса–Остроградского или без ($a, b, c > 0$ — параметры)

<u>а)</u> $\iint\limits_S x^2y^2z\, dy \wedge dz$, где S — ориентированная внешней нормалью полусфера $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$;

б) $\iint\limits_S x^3dy \wedge dz + y^3dz \wedge dx$, где S — ориентированная внешней нормалью половина поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z \geqslant 0$;

<u>в)</u> $\iint\limits_S yzdx \wedge dy + zxdy \wedge dz + xydz \wedge dx$, где S — ориентированная внешней нормалью часть цилиндра $x^2+y^2 = a^2$, $0 \leqslant z \leqslant b$, $x, y \geqslant 0$;

г) $\iint\limits_S x^2dy \wedge dz + y^2dz \wedge dx + z^2dx \wedge dy$, где S — ориентированная координатами x, y коническая поверхность $x^2+y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant a$;

<u>д)</u> $\iint\limits_S x^2dy \wedge dz + y^2dz \wedge dx + z^2dx \wedge dy$, где S — ориентированная внешней нормалью часть сферы $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x, y, z \geqslant 0$.

Т.13. Вычислите с помощью формулы Стокса интегралы

<u>а)</u> $\int\limits_\gamma xdy + ydz + zdx$; б) $\int\limits_\gamma x^3dy + y^3dz + z^3dx$,

по окружности γ, заданной уравнениями $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x+y+z = 0$ и ориентированной против часовой стрелки, если смотреть с направления $(1,1,1)$.

Т.14*. Для каких единичных окружностей с центром в нуле в $\mathbb{R}^4$ интеграл формы $xdy + zdt$ по окружности равен π?

IV. Первообразные дифференциальных форм и топологические инварианты

T.15. Посчитайте криволинейный интеграл $\int\limits_\gamma \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ где γ — простая замкнутая гладкая кривая, не проходящая через точку $(0;0)$, ориентированная против хода часовой стрелки.

T.16. Докажите, что дифференциальная форма $\dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ замкнутая на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, но не имеет первообразной на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

T.17. Пусть гладкая кривая на плоскости замкнута и имеет всюду ненулевую скорость. Докажите, что интеграл кривизны (взятой со знаком)

$$\int_\gamma k(s)\, ds$$

по натуральному параметру является целым числом, умноженным на 2π.

T.18*. Докажите, что если гладкая кривая в предыдущей задаче не имеет самопересечений, то интеграл от её кривизны равен 2π или -2π.

T.19. Придумайте форму $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, у которой $d\alpha = 0$ и для которой не существует $\beta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, такой что $d\beta = \alpha$.

T.20. Докажите, что внешнее произведение замкнутой формы на точную форму — точная форма.

T.21*. Какие дифференциальные формы из $\Omega^2(S^2)$ являются точными? S^2 — это двумерная сфера.

T.22. В обозначениях из курса термодинамики,

а) является ли точной дифференциальная форма $\delta Q = dU + PdV$?

б) является ли точной дифференциальная форма $\dfrac{\delta Q}{T} = \dfrac{dU + PdV}{T}$?

T.23. Запишите условие замкнутости дифференциальной формы $\dfrac{\delta Q}{T} = \dfrac{dU + PdV}{T}$, через частные производные U и P как функций от V и $T > 0$.

V. Градиент, ротор, дивергенция в евклидовом пространстве

T.24. Пусть $\bar{r} = (x, y, z)$, $r = |\bar{r}|$, $\bar{a}$ — некоторый постоянный вектор. Найдите градиент функции

а) r; б) $\dfrac{1}{r}$; в) $\bar{a} \cdot \bar{r}$; г) $|\bar{a} \times \bar{r}|^2$.

Т.25. Пусть $\bar{r} = (x, y, z)$, $r = |\bar{r}|$, $\bar{a}$ — некоторый постоянный вектор. Найдите дивергенцию векторного поля

а) $\bar{r}$; б) $\bar{a} \times \bar{r}$; в) $\dfrac{\bar{r}}{r^3}$.

Т.26. Пусть $\bar{r} = (x, y, z)$, $r = |\bar{r}|$, $\bar{a}$ — некоторый постоянный вектор. Найдите ротор векторного поля

а) $\bar{r}$; б) $\bar{a} \times \bar{r}$; в) $\dfrac{\bar{r}}{r^3}$.

Т.27. Докажите равенства для гладкой функции f и векторных полей $\bar{a}$ и $\bar{b}$

а) $\operatorname{rot} f\bar{a} = f \operatorname{rot} \bar{a} + \operatorname{grad} f \cdot \bar{a}$;

б) $\operatorname{rot} \bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \operatorname{div} \bar{b} - \bar{b} \operatorname{div} \bar{a} + (\bar{b} \cdot \nabla)\bar{a} - (\bar{a} \cdot \nabla)\bar{b}$;

в) $\operatorname{div} \bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \cdot \operatorname{rot} \bar{a} - \bar{a} \cdot \operatorname{rot} \bar{b}$.

Т.28. Упростите выражение

а) $\operatorname{div}(f \operatorname{grad} f)$ для функции $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$;

б) $\operatorname{div} \operatorname{grad} f(r)$ для гладкой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

в) $\operatorname{div} f(r)\bar{r}$ для функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(23+5*)

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 9–14 декабря)

I. Внутреннее умножение, производная Ли и скобка Ли векторных полей

Т.1. Докажите, что для внутреннего умножения векторного поля на дифференциальную форму выполняется

$$i_X i_Y \alpha + i_Y i_X \alpha = 0.$$

Т.2. Посчитайте производную Ли дифференциальной 2-формы $zdx \wedge dy + xdy \wedge dz + ydz \wedge dx$ вдоль векторного поля $x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + z\dfrac{\partial}{\partial z}$.

Т.3. Выведите формулу для производной Ли $L_X \alpha$ для случая

$$\alpha = \sum_i \alpha_i dx_i, \quad X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

T.4. Пусть на многообразии M фиксирована форма объёма ν. Определим дивергенцию векторного поля X как $L_X\nu = (\mathrm{div}X)\nu$. Как посчитать интеграл по многообразию с краем

$$\int_M (\mathrm{div}X)\nu$$

через интеграл по краю ∂M?

T.5. Рассмотрим декартовы и полярные координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$ без точки $(0,0)$. Запишите векторные поля $X = \dfrac{\partial}{\partial r}$ и $Y = \dfrac{\partial}{\partial \phi}$ в базисе $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ и найдите их скобку Ли.

T.6. Пусть X, Y — векторные поля, f, g — гладкие функции. Докажите формулу $[fX, gY] = fg[X,Y] - gY(f)X + fX(g)Y$.

T.7. Посчитайте скобку Ли векторных полей X и Y, если

а) $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $Y = x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$;

б) $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$, $Y = x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$;

в) $X = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$, $Y = -z\dfrac{\partial}{\partial y} + y\dfrac{\partial}{\partial z}$.

T.8. Докажите формулу для векторных полей X, Y и дифференциальной формы α

$$i_{[X,Y]}\alpha = di_X i_Y\alpha + i_X di_Y\alpha - i_Y di_X\alpha - i_Y i_X d\alpha.$$

T.9. Докажите тождество для формы первой степени α и двух векторных полей

$$d\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]).$$

II. Риманов объём, интеграл по нему, звёздочка Ходжа

T.10. Найдите площадь двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^3$ ($b \geqslant a > 0$ — параметры)

а) $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$; б) $\sqrt{y^2 + z^2} = e^{-x}$, $x \geqslant 0$;

в) $x = (b + a\cos\psi)\cos\phi$, $y = (b + a\cos\psi)\sin\phi$, $z = a\sin\psi$, $\phi, \psi \in \mathbb{R}$.

T.11. Посчитайте площадь части сферы в $\mathbb{R}^3$, заключенной между двумя параллельными плоскостями.

T.12. Докажите, что на единичной двумерной сфере сферический треугольник с внутренними углами α, β, γ имеет площадь $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Т.13. Вычислите интегралы по площади двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ ($a > 0$ — параметр)

а) $\iint\limits_{z=\sqrt{x^2+y^2}} e^{-z}\,dS$; б) $\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=a^2} x^2y^2\,dS$.

Т.14. Докажите формулу для интеграла по площади сферы

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\,dS = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\;t\right)\,dt,$$

где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — локально интегрируемая функция.

Т.15. Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ является вложенным трёхмерным подмногообразием с двумерной границей S, ориентированной её внешней нормалью $\bar{n}$, и пусть $\bar{r}_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus S$. Найдите значение интеграла по площади поверхности

$$\iint\limits_{S} \frac{(\bar{r}-\bar{r}_0)\cdot\bar{n}}{|\bar{r}-\bar{r}_0|^3}\,dS.$$

Т.16. Найдите риманов объём трёхмерного тора в $\mathbb{R}^6$, заданного уравнениями

$$x_1^2+x_2^2=1/3, \quad x_3^2+x_4^2=1/3, \quad x_5^2+x_6^2=1/3.$$

Т.17*. Найдите риманов объём единичной сферы $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Т.18*. Посчитайте риманов объём ε-окрестности точки во внутренней метрике двумерной сферы и во внутренней метрике двумерного гиперболического пространства в зависимости от ε.

Т.19. Выразите операцию векторного произведения в $\mathbb{R}^3$ с евклидовой метрикой через внешнее умножение, подъём и опускание индексов и звёздочку Ходжа.

Т.20*. Найдите выражение оператора Лапласа функции в сферических координатах в $\mathbb{R}^3$.

Т.21. Докажите для гладкого векторного поля на $\mathbb{R}^3$, что если $\mathrm{rot}X = 0$ на всём $\mathbb{R}^3$, то $X = \mathrm{grad}f$, для некоторой функции f. А если $\mathrm{div}X = 0$ на всём $\mathbb{R}^3$, то $X = \mathrm{rot}Y$, для некоторого векторного поля Y.

III. Римановы метрики, связность и кривизна

T.22. Рассмотрим в единичном открытом круге $x^2+y^2<1$ метрику Пуанкаре

$$g=\frac{4dx\otimes dx+4dy\otimes dy}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

Найдите в ней расстояние от $(0,0)$ до (x,y). Найдите в ней длину (в данной метрике) окружности радиуса r (в данной метрике) с центром в $(0,0)$.

T.23. Рассмотрим в единичном открытом круге $x^2+y^2<1$ метрику Бельтрами–Клейна

$$g=\frac{(1-x^2-y^2)(dx\otimes dx+dy\otimes dy)+(xdx+ydy)\otimes(xdx+ydy)}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

Найдите в ней расстояние от $(0,0)$ до (x,y). Найдите в ней длину (в данной метрике) окружности радиуса r (в данной метрике) с центром в $(0,0)$.

T.24. Выпишите явный вид геодезических в натуральной параметризации на сфере и в гиперболическом пространстве (как в гиперповерхностях в $\mathbb{R}^{n+1}$).

T.25. Докажите, что все геодезические в метрике Бельтрами–Клейна являются прямыми в обычном смысле.

T.26. Рассмотрим в комплексной полуплоскости $H\subset\mathbb{C}$, определяемой условием $\operatorname{Im} z>0$, метрику Пуанкаре

$$g=\frac{dx\otimes dx+dy\otimes dy}{y^2}.$$

Проверьте, что всякое отображение $z\mapsto\dfrac{az+b}{cz+d}$ с действительными a,b,c,d и $ad-bc=1$ сохраняет H и указанную метрику на ней. Какие ещё бывают диффеоморфизмы H, сохраняющие метрику?

T.27. Найдите выражения для ковариантных производных базисных векторных полей по базисным векторным полям на поверхности в $\mathbb{R}^3$, параметризуемой координатами (x,y) как график

$$z=f(x,y),$$

если f — гладкая функция на открытом подмножестве $\mathbb{R}^2$, а риманова структура графика индуцирована с $\mathbb{R}^3$.

T.28*. Для метрики на области $D \subset \mathbb{R}^2$ вида

$$g(X, Y) = e^{2U}(X, Y),$$

где $U : D \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, а (X, Y) — евклидово скалярное произведение, найдите тензор кривизны Римана.

IV. Полуримановы метрики общей теории относительности

T.29. Докажите, что в метрике $g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ для двух векторов X, Y, для которых $g(X, X), g(Y, Y) < 0$, выполняется неравенство

$$g(X, Y)^2 \geqslant g(X, X) \cdot g(Y, Y).$$

<u>T.30</u>. Определите поведение световых лучей в метрике

$$g = -dt \otimes dt + e^{\alpha t} \left(dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz\right).$$

T.31. Определите поведение радиальных световых лучей в метрике

$$g = -\operatorname{ch}^2 r \cdot dt \otimes dt + dr \otimes dr + \operatorname{sh}^2 r \cdot (\sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi + d\theta \otimes d\theta),$$

где r, ϕ, θ рассматриваются как сферические координаты.

T.32. Возьмите интеграл и посчитайте радиальное расстояние при постоянном времени в метрике Шварцшильда

$$g = -\frac{r - \rho}{r} dt \otimes dt + \frac{r}{r - \rho} dr \otimes dr + r^2 (\sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi + d\theta \otimes d\theta),$$

здесь ρ — некоторая положительная константа и метрика рассматривается в диапазоне $r > \rho$.

<u>T.33</u>. Определите поведение радиальных световых лучей в метрике Шварцшильда.

(29+4*)

Задания составили: О. А. Загрядский, к. ф.-м. н., ассистент,
М. П. Савёлов, к. ф.-м. н., ассистент,
Р. Н. Карасёв, д. ф.-м. н., профессор