ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: Физматлит, 2003. (цитируется — C1)
2. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: Физматлит, 2003. (цитируется — C2)
3. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: Физматлит, 2003. (цитируется — C3)

Замечание. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендуется разобрать на семинарских занятиях. Если задача с подчёркнутым номером была разобрана, то студент не обязан записывать её решение в домашнее задание.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 28 февраля – 4 марта)

I. Множества в конечномерных евклидовых пространствах

C3, §2: 9 (вопросы а, б, г) ($\underline{3}$, 6).

T.1. Найдите для множества точек в квадрате $[0,1]\times[0,1]$ с рациональными координатами множества его

а) внутренних точек; б) внешних точек; в) граничных точек.

C3, §1: 15; 18; 39($\underline{6}$,7).

T.2. Является ли множество

$$\{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2\}$$

в пространстве $\mathbb{R}^4$ а) открытым; б) замкнутым; в) областью?

T.3. Является ли множество

$$\{(e^t \cos t, e^t \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

на плоскости $\mathbb{R}^2$ а) открытым; б) замкнутым; в) областью?

II. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

C3, §2: 37(2, 8); 48(9).

Т.4. Для функции $f(x,\, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ исследуйте существование предела в точке $(0,\, 0)$. Посчитайте пределы по всевозможным направлениям для этой функции в точке $(0,\, 0)$.

Т.5. Существует ли инъективная непрерывная функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Т.6*. Существует ли сюръективное непрерывное отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$?

III. Частные производные, дифференциал и формула Тейлора для функции нескольких переменных

С3, §3: <u>19(8)</u>; 20(3); 21(<u>2</u>, 11).
С3, §4: <u>4</u>; 19(2); 25(2); <u>42(1)</u>.
С3, §4: <u>70(2)</u>; 74(5).

IV. Числовые ряды

С2, §13: 2(1); 5(3); <u>10(1)</u>; <u>13(2)</u>; 14(4).
С2, §14: 2(7); <u>11(6)</u>; 19(8, <u>15</u>); 21(7, <u>14</u>); <u>25(9)</u>; 38*.
С2, §15: 3(4); <u>4(4)</u>; 8(4); 9(2).

Во всех задачах §15 исследуйте также абсолютную сходимость рядов.

<u>**Т.7**</u>. При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{(\sqrt{n} + \sin n)^{\alpha}}$$

сходится? При каких значениях α он сходится абсолютно?

$\boxed{40 + 2^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 4–8 апреля)

I. Функциональные последовательности

С2, §17: 8(5); 9(11); 12(5); 17(10).

Т.1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на отрезке $E = [0,\, 1]$ функциональные последовательности:
а) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

II. Функциональные ряды

С2, §18: <u>22(1)</u>; 32(5); 34(6); <u>36(2)</u>; 45; <u>46</u>.

Т.2. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,\, 1)$ и $E_2 = (1,\, +\infty)$ ряды:
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x \sin \frac{1}{(xn)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x \ln nx}{n^2}$.

III. Свойства равномерной сходимости

С2, §19: 2; 5; <u>14</u>.

Т.3. Докажите, что если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и имеет компактный носитель (равна нулю за пределами некоторого отрезка), а $t_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность функций

$$f_n(x) = f(x - t_n)$$

равномерно стремится к f.

Т.4. Последовательность неотрицательных непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций (f_n) убывает по n и поточечно стремится к нулевой функции. Докажите, что на самом деле (f_n) сходится равномерно.

IV. Степенные ряды и ряд Тейлора

С2, §20: 2(3); 3(1); <u>5(2)</u>; 8(4).
С2, §21: 6(5); 9(3); 11(4); 19(4); <u>25(4)</u>; 56(1); <u>80</u>.

V. Интеграл функции одной переменной

С2, §6: <u>4(1)</u>; 112(1, 2); 117; <u>126</u>; 197; 108(1).
С2, §10: 45.

Т.5. Докажите, что $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{2}{a}$, где $b > a > 0$.

VI. Свойства меры Жордана и меры Лебега

<u>Т.6</u>. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ и $T \subset \mathbb{R}^m$ — элементарные множества. Докажите, что для их декартова произведения $S \times T \subset \mathbb{R}^{n+m}$ выполняется $m\,(S \times T) = mS \cdot mT$.

Т.7. Может ли счётное множество $X \subseteq \mathbb{R}$ иметь нулевую меру Жордана?

Т.8. Может ли счётное множество $X \subseteq \mathbb{R}$ иметь положительную меру Жордана?

<u>Т.9</u>. Пусть X — это множество рациональных точек квадрата $[0, 1]^2$. Измеримо ли оно по Жордану? Измеримо ли оно по Лебегу?

Т.10. Пусть X — это множество точек квадрата $[0, 1]^2$, имеющих хотя бы одну рациональную координату. Измеримо ли оно по Лебегу?

Т.11. Приведите пример замкнутого подмножества отрезка $[0, 1]$, состоящего только из иррациональных чисел и имеющего меру Лебега не менее 0,999.

T.12. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет Лебегову меру нуль, функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Докажите, что $f(A)$ тоже имеет Лебегову меру нуль.

T.13*. Докажите, что утверждение предыдущей задачи будет неверно, если заменить непрерывную дифференцируемость f на непрерывность.

T.14. Докажите, что если $X \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу с конечной мерой, то мера $\mu(X \setminus (X+t))$ стремится к нулю при $t \to 0$. Здесь $X+t$ — это сдвиг множества X на t.

T.15. Докажите, что у произвольной функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ множество точек разрыва измеримо по Лебегу.

T.16. Докажите, что если $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу, то её график имеет меру Лебега нуль на плоскости.

T.17. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема везде. Докажите, что её производная измерима по Лебегу.

$\boxed{48+1^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 9–13 мая)

I. Абсолютно и условно сходящиеся интегралы функции одной переменной

С2, §11: 85; 88; 94; 98.

С2, §12: 91; 100; 104; 121; 125; 135; 139; 140; 183; 227.

T.1. При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{(\sqrt{x} + \sin x)^\alpha}\, dx$$

сходится условно и при каких значениях α он сходится абсолютно?

II. Вычисление и приложения интеграла Лебега

С2, §7: 4(3); 69(6); 72(3); 82(4).

С2, §8: 1(7); 24.

T.2. Пусть $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно определённая квадратичная форма. Докажите формулу

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)}\, dx_1 \ldots dx_n = \pi^{n/2} \cdot (\det Q)^{-1/2}.$$

<u>Т.3</u>. Посчитайте интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|}\,dx_1 \dots dx_n.$$

Т.4. Напишите асимптотически эквивалентную формулу для двойного факториала

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

при $n \to \infty$ без факториалов и гамма-функций.

Т.5. Докажите формулу

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

III. Свойства интеграла Лебега

<u>Т.6</u>. Верно ли, что если f имеет первообразную на отрезке $[a,\,b]$, то f интегрируема по Лебегу на отрезке $[a,\,b]$?

Т.7. Докажите, что если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу с конечным интегралом, то

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|\,dx = 0.$$

Т.8. Докажите, что если $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, дифференцируема на (a,b), и её производная ограничена, то

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt.$$

<u>Т.9</u>. Докажите, что интегрируемая по Риману на отрезке функция интегрируема и по Лебегу с тем же интегралом.

Т.10*. Докажите, что $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена и множество её точек разрыва имеет меру Лебега нуль.

<u>Т.11</u>. Пусть f интегрируема по Лебегу на отрезке $[a,b]$. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что если $X \subset [a,b]$ измеримо и $\mu(X) < \delta$, то

$$\int_X |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Т.12*. Приведите пример непрерывной и непостоянной на отрезке функции, у которой производная почти всюду (по мере Лебега) существует и почти всюду равна нулю.

$\boxed{30 + 2^*}$

Составитель задания: д. ф.-м. н., профессор Р. Н. Карасёв