ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В КОМБИНАТОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ.

Р.Н. КАРАСЁВ

Аннотация. Обзор посвящён некоторым результатам в области комбинаторной и выпуклой геометрии, начиная с классических теорем и вплоть до последних современных результатов. В основном, рассматриваются те результаты, в доказательстве которых существенно применяются методы алгебраической топологии.

Подробно освещаются разные обобщения теоремы Борсука-Улама для $(Z_p)^k$-действия, применения к задаче Кнастера об уровнях функции на сфере, обсуждаются приложения к теории Люстерника-Шнирельмана оценки количества критических точек гладкой функции.

Приводится обзор топологических методов в установлении нижних оценок хроматического числа графов и гиперграфов. Рассматриваются теоремы типа Тверберга о конфигурациях точек в евклидовом пространстве и их топологические аналоги, рассматриваются близкие к ним обобщения теоремы ван Кампена-Флореса о невложимости остова симплекса. Приводятся описания результатов автора по «двойственным» аналогам теорем о центральной точке и Тверберга.

Рассматриваются результаты о существовании вписанных и описанных многогранников специального вида для выпуклых тел, о существовании бильярдных траекторий в выпуклом теле. Также приводятся результаты о делении мер гиперплоскостями и другими разбиениями евклидова пространства.

Даётся краткий обзор топологических подходов к теоремам типа Хелли, связанных с рассмотрением нерва семейств выпуклых множеств в евклидовом пространстве, приводятся недавние результаты, заменяющие требование выпуклости в теоремах типа Хелли на гомотопические условия. Рассматриваются некоторые обобщения теоремы Кнастера-Куратовского-Мазуркевича, имеющие приложения в задачах комбинаторной геометрии.

Приводится обзор по теоремам типа Хелли для плоских трансверсалей, подробно рассматриваются результаты, использующие топологию многообразия Грассмана и канонического расслоения над ним. Приводятся некоторые результаты автора: аналоги теорем о центральной точке и Тверберга для трансверсалей, теоремы о трансверсалях типа Борсука-Улама.

Содержание

Список литературы 48

1. Введение

В этом обзоре рассматриваются разные варианты применения топологических методов в задачах комбинаторной и выпуклой геометрии. Внимание к топологическим методам неслучайно, ведь одни из самых первых классических теорем комбинаторной и выпуклой геометрии — лемма Шпернера о триангуляции симплекса, теорема Хелли, теорема «о бутерброде» — имеют непосредственное отношение к топологии.

Следует отметить, что в начале двадцатого века связь между топологией и комбинаторной геометрией выражалась в основном в поисках комбинаторных доказательств основных топологических фактов, связанных с понятием размерности и степени отображения. Типичным примером является уже упомянутая лемма Шпернера. В последнее время наблюдается в основном обратный процесс: содержательные топологические факты находят приложения в комбинаторике и комбинаторной геометрии и часто позволяют по новому взглянуть на старые результаты.

2. Классические теоремы комбинаторной и выпуклой геометрии

2.1. Теорема Брауэра о неподвижной точке. Одним из результатов, демонстрирующим важность топологических методов в геометрии, является следующая теорема [1].

Теорема 1 (Брауэр, 1910)**.** *Пусть $K \subseteq \mathbb{R}^d$ — выпуклый компакт. Тогда для всякого непрерывного отображения $f : K \to K$ найдётся точка $x \in K$ такая, что $x = f(x)$. Такая точка называется неподвижной точкой отображения f.*

В современной интерпретации, теорема Брауэра следует из существования некоторого препятствия к построению отображения без неподвижной точки, которое по сути является классом Эйлера векторного расслоения. Более подробное обсуждение такого подхода и пример доказательства теоремы Брауэра см. в разделе 4.3.

2.2. Теоремы Каратеодори, Радона и Хелли. Одним из основных фактов о понятии выпуклости является теорема Каратеодори [2].

Теорема 2 (Каратеодори, 1911)**.** *Если X — конечное множество в $\mathbb{R}^d$, то всякая точка его выпуклой оболочки лежит в выпуклой оболочке некоторого подмножества $Y \subseteq X$, для которого $|Y| \leq d+1$.*

Здесь и далее $|Y|$ обозначает число элементов множества Y.

Другими важными утверждениями про выпуклость являются теоремы Радона и Хелли [3, 4]. Теорема Хелли была доказана Хелли (примерно в 1915–1916 году) и сообщена Радону, Радон первым опубликовал придуманное им доказательство теоремы Хелли через следующую теорему.

Теорема 3 (Радон, 1921)**.** *Всякое множество из $d+2$ точек в $\mathbb{R}^d$ можно разбить на два непустых подмножества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

Теорема 4 (Хелли, 1923)**.** *Пусть $\mathcal{F}$ — конечное семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$. Семейство $\mathcal{F}$ имеет общую точку тогда и только тогда, когда всякое подсемейство $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ с $|\mathcal{G}| \leq d+1$ имеет общую точку.*

Теорема Хелли может быть также выведена из теоремы Каратеодори. Кроме того, теорема Хелли допускает топологическое доказательство, которое будет обсуждено в разделе 4.9.

2.3. Теорема Кнастера-Куратовского-Мазуркевича и лемма Шпернера о триангуляции симплекса. Сформулируем лемму Шпернера о триангуляции симплекса [5]. Сначала зафиксируем некоторые обозначения.

Определение 1. *Симплексом размерности n* назовём выпуклую оболочку $n+1$-й аффинно независимой точки $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ в $\mathbb{R}^d$ $(d \geq n)$.

Для симплекса $\Delta = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ выпуклые оболочки

$$\partial_i \Delta = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}\}$$

назовём *гипергранями симплекса.* Выпуклые оболочки непустых собственных подмножеств множества $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ назовём *гранями симплекса.* Сами точки $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ назовём вершинами симплекса.

Определение 2. Обозначим множество индексов $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$. *Раскраской множества* X в m цветов назовём отображение $c : X \to [m]$. Если $c(x) = i$, то будем говорить, что x покрашено в цвет i.

Определение 3. *Триангуляцией* подмножества $X \subseteq \mathbb{R}^d$ назовём набор симплексов T, такой что

1) если $S \in T$, то все грани S тоже принадлежат T;

2) если $S_1, S_2 \in T$, то пересечение $S_1 \cap S_2$ либо пусто, либо является гранью S_1 и гранью S_2.

3) $X = \bigcup T$.

Грани симплексов триангуляции называются *гранями триангуляции*, рёбра симплексов триангуляции называются *рёбрами триангуляции.*

Теорема 5 (Шпернер, 1928)**.** *Пусть Δ — симплекс размерности n, T — триангуляция симплекса Δ, вершины которой раскрашены в $n+1$ цвет так, что на гиперграни $\partial_i\Delta$ не встречается цвет i. Тогда триангуляция T содержит симплекс, на вершинах которого встречаются все цвета.*

Непрерывным аналогом леммы Шпернера является теорема Кнастера-Куратовского-Мазуркевича (далее просто теорема ККМ) [6].

Теорема 6 (Кнастер, Куратовский, Мазуркевич, 1929)**.** *Предположим, что n-мерный симплекс Δ покрыт $n+1$ замкнутым подмножеством $F_1, \dots, F_{n+1}$, причём для каждого $i \in [n+1]$*

$$F_i \cap \partial_i\Delta = \emptyset.$$

Тогда $\cap_{i=1}^{n+1} F_i \neq \emptyset$.

Теорема ККМ следует из леммы Шпернера, а из теоремы ККМ, в свою очередь, следует теорема Брауэра о неподвижной точке. Доказательство теоремы Брауэра о неподвижной точке через лемму Шпернера даёт некоторый способ вычислительной реализации теоремы Брауэра.

Приведём также близкую к лемме Шпернера лемму из [7].

Теорема 7 (Tucker, 1946)**.** *Пусть T — триангуляция центрально-симметричного выпуклого многогранника $K \subset \mathbb{R}^d$, центрально симметричная на ∂K. Предположим, что на всех вершинах T расставлены метки из множества $\{+1, -1, +2, -2, \dots, +d, -d\}$, причём для всякой вершины $v \in \partial K$ сумма меток v и $-v$ равна нулю. Тогда найдётся ребро триангуляции T, сумма меток на концах которого равна нулю.*

С помощью этой леммы можно доказать не только теорему Брауэра, но и теорему Борсука-Улама, о которой пойдёт речь в следующем разделе.

2.4. **Теоремы Борсука-Улама, Люстерника-Шнирельмана, теорема «о бутерброде».** Приведём три эквивалентных формулировки теоремы Борсука-Улама-Люстерника-Шнирельмана [8, 9], которая тесно связана с теоремами Хелли и Брауэра.

Теорема 8 (Борсук, Люстерник, Шнирельман, 1930–1933). *Если сфера S^n покрыта $n+1$-м замкнутым множеством $X_1, \dots, X_{n+1}$, то по крайней мере одно из X_i содержит пару диаметрально противоположных точек на сфере.*

Теорема 9 (Борсука, Улам, 1933). *Если на сфере S^n даны n нечётных непрерывных функций $f_1, \dots, f_n$, то для некоторой точки $x \in S^n$*

$$f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = 0.$$

Теорема 10 (Борсука, Улам, 1933). *Для всякого непрерывного отображения $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ найдётся точка$x \in S^n$, для которой $f(x) = f(-x)$.*

Из теоремы Борсука-Улама также можно вывести теорему Брауэра о неподвижной точке.

Следующее утверждение также эквивалентно теореме Борсука-Улама.

Теорема 11 (Люстерник, Шнирельман, 1930). *Если сфера S^n покрыта n замкнутыми множествами $X_1, \dots, X_n$, инвариантными относительно центральной симметрии $x \mapsto -x$, то для некоторого i одна из компонент связности множества X_i содержит пару диаметрально противоположных точек на сфере.*

В разделе 3.7 будет приведено небольшое обсуждение теории Люстерника-Шнирельмана, обобщения и применения этой теоремы.

Одним из геометрических следствий теоремы Борсука-Улама является следующая теорема о делении мер [10, 11].

Теорема 12 (Теорема «о бутерброде», Stone, Tukey, Steinhaus, 1942–1945). *Пусть на $\mathbb{R}^d$ заданы d абсолютно непрерывных вероятностных мер $\mu_1, \dots, \mu_d$. Тогда найдётся полупространство $H \subset \mathbb{R}^d$ такое, что для любого $i = 1, \dots, d$*

$$\mu_i(H) = 1/2.$$

Теорема Борсука-Улама для покрытий допускает другую формулировку: $d-1$-мерную сферу диаметра 1 нельзя покрыть d множествами диаметра меньшего 1. На основе этого факта Борсук сформулировал гипотезу [12, 9].

Гипотеза 1 (Борсук, 1932). *Любой выпуклый компакт $K \subset \mathbb{R}^d$ можно разбить на $d+1$ множество меньшего диаметра.*

Эта гипотеза и близкие к ней вопросы фигурируют в литературе под название «проблема Борсука». Для гладких компактов гипотеза Борсука доказывается довольно просто, но в случае негладких компактов был обнаружен контрпример [13], более того, оказалось что порядок роста требуемого количества множеств разбиения не менее $1.2^{\sqrt{d}}$, что сильно отличается от предполагаемых $d+1$ при достаточно больших d. В разделе 4.6 будут обсуждаться варианты доказательства гипотезы Борсука и её усилений в размерностях 2 и 3.

2.5. **Теорема Неймана-Радо о центральной точке.** Другой результат, касающийся деления мер гиперплоскостями — теорема о центральной точке [14, 15].

Теорема 13 (Теорема о центральной точке, Нейман, Радо, 1945–1946)**.** *Для абсолютно непрерывной вероятностной меры μ на $\mathbb{R}^d$ найдётся такая точка $x \in \mathbb{R}^d$, что для всякого полупространства $H \ni x$ $\mu(H) \geq \dfrac{1}{d+1}$.*

Эта теорема является следствием теоремы Хелли. У теоремы о центральной точке также есть дискретный аналог.

Теорема 14 (Дискретная теорема о центральной точке)**.** *Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано конечное множество X из n точек. Тогда найдётся точка $x \in \mathbb{R}^d$ такая, что для всякой полуплоскости $H \ni x$*

$$|H \cap X| \geq \left\lfloor \frac{n+d}{d+1} \right\rfloor.$$

2.6. **Теоремы Шнирельмана и Какутани о вписывании и описывании.** Приведём два классических результата о вписывании и описывании фигур, доказательства которых основываются на топологических соображениях.

Теорема 15 (Шнирельман [16], 1934)**.** *Для всякой гладкой замкнутой кривой $C \subset \mathbb{R}^2$ без самопересечений найдётся квадрат, все вершины которого лежат на кривой C.*

Теорема 16 (Какутани [17], 1942)**.** *Для всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^3$ найдётся куб Q, который содержит K, и при этом каждая грань Q пересекается с K.*

В разделе 4.6 приведены другие теоремы о вписывании и описывании, а также приведено доказательство теоремы Шнирельмана с помощью современного топологического подхода.

3. Топологические обобщения теоремы Борсука-Улама

3.1. **Пространства с действием конечной группы.** Сначала введём некоторую терминологию, которая позволит дать ещё одну формулировку теоремы Борсука-Улама и её обобщений. Далее G — некоторая конечная группа.

Определение 4. Топологическое пространство с непрерывным действием группы G называется G*-пространством*. Непрерывные отображения между G-пространствами, коммутирующие с действием G, назовём G*-отображениями* или G*-эквивариантными отображениями*.

Далее циклические группы порядка n обозначаем Z_n. В этих терминах теорема Борсука-Улама формулируется следующим образом. Пусть группа Z_2 действует на n-мерных сферах отображением $x \mapsto -x$, далее такое действие будем называть *антиподальным*.

Теорема 17 (Теорема Борсука-Улама для Z_2)**.** *Не существует Z_2-отображений сфер с антиподальным действием $S^n \to S^k$, если $n > k$.*

3.2. **Теорема ван Кампена-Флореса.** Следствием теоремы Борсука-Улама в приведённой выше формулировке является следующая теорема о невложимости [18, 19].

Теорема 18 (ван Кампен, Флорес, 1932–1934)**.** *Пусть Δ_k^{2k+2} — k-мерный остов $2k+2$-мерного симплекса. Тогда не существует непрерывного инъективного отображения*

$$f : \Delta_k^{2k+2} \to \mathbb{R}^{2k}.$$

Доказательство. Обозначим $K = \Delta_k^{2k+2}$. Инъективное отображение $f : K \to \mathbb{R}^{2k}$ порождает отображение

$$g(x, y) \mapsto x - y,$$

которое после нормализации можно считать отображением из множества пар точек $(x, y) \in K \times K$ с непересекающимися носителями в сферу S^{2k-1}. Это отображение коммутирует с действием группы Z_2 перестановками на $K \times K$ и антиподальным действием на S^{2k-1}. При этом можно показать, что пространство пар точек с непересекающимися носителями (вырезанное произведение, см. раздел 4.4) K^2_Δ гомеоморфно $2k$-мерной сфере с антиподальным действием Z_2. Значит отображение g не существует по теореме Борсука-Улама. $\square$

3.3. **Теоремы типа Борсука-Улама для действия групп $(Z_p)^k$.** Для распространения теоремы Борсука-Улама от Z_2-отображений до G-отображений с другой конечной группой G следует понять, какими пространствами можно заменить сферы S^n и S^k и какое действие группы G на них потребовать.

Определение 5. Пусть X — G-пространство. Точка $x \in X$ называется неподвижной точкой G, если для любого $g \in G$

$$gx = x.$$

Множество неподвижных точек X обозначается X^G.

Теорема Борсука-Улама для отображений неоднократно обобщалась в работах Красносельского [20], Yang [21, 22], Шварца [23] и в книге Коннера и Флойда [24]. Одна из последних общих формулировок обобщения теоремы Борсука-Улама выглядит следующим образом [25]. Далее p обозначает некоторое простое число.

Теорема 19 (Воловиков, 1996)**.** *Рассмотрим группу $G = (Z_p)^k$ и G-пространства X и Y. Предположим, что $\tilde{H}^i(X, Z_p) = 0$ при всех $i \leq n-1$, $Y^G = \emptyset$ и*

$$\tilde{H}^i(Y, Z_p) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ Z_p, & i = k \end{cases}.$$

Если $n > k$, то не существует G-отображений $f : X \to Y$.

На самом деле в приложениях, как правило, Y — это пространство сфер некоторого линейного представления V группы G, которое не имеет тривиальных слагаемых ($V^G = 0$). Доказательство теоремы 19 существенно опирается на тот факт, что класс Эйлера представления V в эквивариантных когомологиях одноточечного пространства $H_G^{\dim V}(\mathrm{pt}, Z_p)$ не равен нулю (см. [26], глава IV §1).

Возможно также обобщение теоремы Борсука-Улама в формулировке для отображений $S^n \to \mathbb{R}^n$ (ниже приведён частный случай утверждения из [27]).

Теорема 20 (Воловиков, 1992)**.** *Рассмотрим группу $G = (Z_p)^k$ и G-пространство X. Пусть M — компактное топологическое m-мерное многообразие, ориентируемое, если $p > 2$. Рассмотрим непрерывное отображение $f : X \to M$. Предположим, что $\tilde{H}^i(X, Z_p) = 0$ при всех $i \leq n-1$, $n \geq m(p^k - 1)$, и если $p^k = 2$, то гомоморфизм $f^* : H^m(M, Z_p) \to H^m(X, Z_p)$ тривиален. Тогда отображение f отображает некоторую орбиту G в одну точку.*

Можно заметить, что в этом утверждении нельзя заменить топологическое многообразие размерности m на симплициальный или CW-комплекс размерности m (см. [28, 29]). Простейший пример даёт рассмотрение окружности S и триода T — множества, состоящего из трёх отрезков с общей точкой. Тогда легко строится непрерывное отображение $S \to T$, которое не отображает никакие две антиподальные точки S в одну точку T.

3.4. **Теоремы типа Борсука-Улама для других конечных групп.** В книге [30] рассматривался вопрос обобщения теоремы Борсука-Улама на G-действия на сферах представлений G с некоторым ослаблением условия на размерности.

Определение 6. Будем говорить, что для группы G выполняется свойство Борсука-Улама с константой a_G, если для двух линейных представлений V и W группы G с условием $W^G = 0$ из существования G-отображения между пространствами сфер $SV \to SW$ следует, что $\dim V \leq a_G \dim W$.

Основной результат можно сформулировать следующим образом [30].

Теорема 21 (Bartsch, 1993)**.** *Из конечных групп только p-группы обладают свойством Борсука-Улама с некоторой константой.*

Утверждение для p-групп следует из положительного решения [31] гипотезы Сигала об изоморфизме между группой стабильных когомотопий классифицирующего пространства BG и пополнением кольца Бернсайда группы G. За подробностями читатель может обратиться к первоисточникам [31, 30], в данном обзоре далее этот факт использоваться не будет.

В следующем разделе рассматривается более простая и удобная в приложениях топологическая техника, связанная с использованием обычных эквивариантных (борелевских) когомологий.

3.5. **Индекс $(Z_p)^k$-действия.** В приведённых выше формулировках теорем 19 и 20 требовались некоторые условия на Z_p-связность пространств с действием группы $G = (Z_p)^k$.

В некоторых применениях этого условия достаточно и даже удаётся доказать, что соответствующее пространство $n-1$-связно с любыми коэффициентами. Но для ряда применений этого недостаточно. Поэтому требуется более точное описание препятствия к построению G-отображения.

Здесь мы приведём краткий обзор, более полное изложение можно найти в книге [26]. Напомним некоторые общепринятые обозначения.

Определение 7. Пусть EG — гомотопически тривиальный CW-комплекс с действием группы G. В качестве EG для конечной группы можно взять бесконечный (прямой предел конечных) джойн $G*G*\dots*G*\dots$. Будем также обозначать k-кратный джойн $EG_k = G^{*k}$.

Фактор EG/G будем обозначать BG.

Определение 8. Для всякого G-пространства обозначим $X_G = (X \times EG)/G$, где группа G диагонально действует на произведении (конструкция Бореля). Тогда *эквивариантными когомологиями* X с коэффициентами в A называются группы

$$H_G^*(X, A) = H^*(X_G, A).$$

Если действие группы G на X свободно, то очевидно X_G гомотопически эквивалентно X/G и тогда $H_G^*(X, A) = H^*(X/G, A)$. Когомологии в определении могут быть любыми, однако при рассмотрении «сложных» множеств в геометрических задачах бывает полезно использовать когомологии Александера-Спеньера или Чеха, так как они обладают свойством непрерывности относительно пересечений.

Из определения ясно, что эквивариантные когомологии являются контравариантным функтором G-пространств. Каждое G-пространство X допускает отображение в одноточечное пространство pt с тривиальным действием G, следовательно существует каноническое отображение $\pi_X^* : H_G^*(\mathrm{pt}, A) = H^*(BG, A) \to H_G^*(X, A)$.

Далее рассматриваем случай групп вида $(Z_p)^k$ и за поле коэффициентов когомологий берём Z_p. Обозначение коэффициентов когомологий опускаем. Тогда всякая алгебра когомологий $H_G^*(X)$ с помощью отображения π_X^* получает естественную структуру алгебры над $A_G = H_G^*(\mathrm{pt})$. Далее будет применяться следующее описание строения алгебры A_G.

Теорема 22. *При $p = 2$ алгебра A_G является кольцом многочленов от k одномерных образующих $\{v_i\}_{i=1}^k$.*

При $p > 2$ алгебра A_G является тензорным произведением кольца многочленов от k двумерных образующих $\{u_i\}_{i=1}^k$ и внешней алгебры от k одномерных образующих $\{v_i\}_{i=1}^k$. При этом действие гомоморфизма Бокштейна задаётся формулой $\beta v_i = u_i$.

Сделаем определение, следуя работе Fadell, Husseini [32].

Определение 9. Для G-пространства X ядро естественного отображения $\pi_X^* : A_G \to H_G^*(X)$ назовём *индексом X со значением в идеалах* и обозначим $\operatorname{Ind}_G X$.

Иногда бывает удобнее ввести числовой индекс.

Определение 10. Обозначим $I_n A_G$ градуированный идеал в A_G, состоящий из элементов размерности $\geq n$.

Определение 11. *(Нижним) когомологическим индексом* G-пространства X назовём

$$\underline{\operatorname{ind}}_G X = \max\{n : \operatorname{Ind}_G X \subseteq I_{n+1} A_G\}.$$

Определение 12. *Верхним когомологическим индексом* G-пространства X назовём

$$\overline{\operatorname{ind}}_G X = \max\{n : \exists \alpha \in A_G,\ \pi_X^*(\alpha) \neq 0\}.$$

Исходя из строения алгебры A_G и действия в ней гомоморфизма Бокштейна легко видеть, что в случае группы $G = Z_p$ индекс со значением в идеалах полностью определяется численным индексом и оба численных индекса равны. Важность индекса иллюстрируется следующей теоремой:

Теорема 23 (Монотонность индекса)**.** *Если существует G отображение $X \to Y$, то $\operatorname{Ind}_G X \supseteq \operatorname{Ind}_G Y$.*

Это утверждение очевидно следует из функториальности естественного отображения $A_G \to H_G^*(X)$. Оно даёт способ доказать отсутствие G-отображений между пространствами.

Опишем один из основных способов практического вычисления эквивариантных когомологий и, в частности, индекса (см. также [33]).

Теорема 24 (Спектральная последовательность Лере-Серра)**.** *Для всякого связного G-пространства существует спектральная последовательность с членом*

$$E_2^{x,y} = H^x(BG, \mathcal{H}^y(X, Z_p)),$$

сходящаяся к градуированному модулю, соответствующему некоторой фильтрации $H_G^*(X, Z_p)$.

Здесь система коэффициентов $\mathcal{H}^y(X, Z_p)$ получается из когомологий $H^y(X, Z_p)$ действием на них $G = \pi_1(BG)$. Дифференциалы этой спектральной последовательности являются гомоморфизмами $H^*(BG, Z_p)$-модулей.

Это утверждение показывает, что $\operatorname{Ind}_G X$ является образом всех дифференциалов спектральной последовательности в нижней строке этой последовательности. В частности, если $\tilde H^i(X, Z_p) = 0$ при $i \le n-1$, то $\underline{\operatorname{ind}}_G X \ge n$. Приведём некоторое обобщение этого рассуждения, более слабый вариант которого был использован в работе автора [35].

Теорема 25 (Карасёв, 2008). *Если $G = (Z_p)^k$, G-пространство X связно и группы $\tilde H^m(X, Z_p)$ при $m < n$ как $Z_p[G]$-модули имеют композиционные ряды, составленные из конечномерных $Z_p[G]$-модулей, индуцированных с собственных подгрупп $H \subset G$. Тогда*

$$\underline{\operatorname{ind}}\, X \ge n.$$

Напомним, что $Z_p[G]$-модуль M индуцирован из $Z_p[H]$-модуля N, если $M = Z_p[G]\otimes_{Z_p[H]} N$. Конечномерный модуль индуцирован тогда и только тогда, когда он коиндуцирован: $M = \operatorname{Hom}_{Z_p[H]}(Z_p[G], N)$ (см. [34], глава III, предложение 5.9).

Доказательство. Пусть если $p = 2$, то $S_G = A_G$, а если $p > 2$, то $S_G = Z_p[u_1, \dots, u_k]$ — алгебра многочленов, содержащаяся в A_G.

Если G-модуль M коиндуцирован из H-модуля N, то $H^*_G(M) = H^*_H(N)$ (см. [34], глава III, предложение 6.2). Следовательно, для таких модулей многочлен Гильберта их A_G-модулей когомологий имеет степень не более $k-1$. Если G-модуль имеет композиционный ряд из таких модулей, то многочлен Гильберта его когомологий также будет иметь степень не более $k-1$, что следует из рассмотрения длинной точной последовательности когомологий.

Следовательно, строчки с номерами $m = 1, \dots, n-1$ в члене E_2 спектральной последовательности теоремы 24 имеют многочлены Гильберта степеней не более $k-1$. Это будет верно и во всех остальных членах спектральной последовательности E_r ($r \ge 2$). Покажем, что образ всякого дифференциала $d_2, \dots, d_{n-1}$ в нижней строке спектральной последовательности равен нулю. Это следует из того, что если многочлен Гильберта A_G-модуля L имеет степень не более $k-1$, то

$$\operatorname{Hom}_{A_G}(L, A_G) = 0,$$

так как всякий $l \in L$ аннулируется некоторым элементом из алгебры S_G (иначе противоречие со степенью многочлена Гильберта), а в модуле A_G никакой элемент модуля не аннулируется никаким элементом S_G.

Значит в нулевой строке ненулевые члены с размерностями $\le n$ остаются ненулевыми во всех членах спектральной последовательности, в том числе в E_∞. Значит, они останутся ненулевыми и в $H^*_G(X, Z_p)$. □

Изложенные в этом разделе соображения показывают, что в теоремах 19 и 20 не обязательно требовать тривиальность групп когомологий, а достаточно, чтобы выполнялось условие $\underline{\operatorname{ind}}_G X \ge n$. В теореме 20 также надо потребовать, чтобы отображение $f^* : H^i(M, Z_p) \to H^i(X, Z_p)$ было тривиальным при всех положительных i. В работе Воловикова [36] приведены другие варианты понятия индекса $(Z_p)^k$-пространств, которые могут быть использованы для установления аналогов теорем типа Борсука-Улама.

3.6. $(Z_p)^k$**-действие в задаче Кнастера.** Приведём обзор результатов по задаче Кнастера [37].

Гипотеза 2 (Кнастер, 1947)**.** *Для всякой непрерывной функции f на единичной сфере $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ и всякого набора из d точек $x_1, \dots, x_d \in S^{d-1}$ найдётся вращение $\rho \in SO(d)$ такое, что*

$$f(\rho(x_1)) = f(\rho(x_2)) = \cdots = f(\rho(x_d)).$$

Кашиным и Szarek было доказано, что для достаточно больших d (примерно $d \geq 10^{12}$) эта гипотеза неверна [38], в работе Hinrichs, Richter [39] были построены контрпримеры к этой гипотезе для всех $d \geq 67$.

Тем не менее, есть и положительные результаты по гипотезе Кнастера для специальных конфигураций точек.. В работе Ямабэ и Юдзёбо [40] было доказано, что гипотеза Кнастера верна для множества, состоящего из концов векторов ортонормированного базиса, в работе Флойда [41] гипотеза Кнастера доказана для любых конфигураций при $d = 3$.

В работе Макеева [42] и других его работах были применены Z_p-эквивариантные отображения. Фактически гипотеза Кнастера была доказана для наборов из p точек на сфере, группа симметрий которых содержит Z_p, для наборов из $p+1$-й точки с Z_p-симметрией и для «почти Z_p-симметричных» наборов при $p \geq 2d-2$ (в частности, для множества из 4 вершин правильного пятиугольника).

В работе Воловикова [27] гипотеза Кнастера была доказана для конфигураций из p^k точек с транзитивной группой симметрий $(Z_p)^k$, действие которой в пространстве задаётся перестановками базисных векторов, также из соображений непрерывности и гомотопического продолжения (см. раздел 4.3) гипотеза Кнастера была доказана для конфигураций из $p^k + 1$ точки с $(Z_p)^k$-симметрией.

В обоих указанных выше работах доказательство гипотезы Кнастера по сути сводилось к следующему. Пусть группа симметрий $G = (Z_p)^k$ вложена в $SO(d)$. Тогда $SO(d)$ становится G-пространством. Отображение f из формулировки гипотезы Кнастера даёт G-эквивариантное отображение $g : SO(d) \to \mathbb{R}^d$

$$g : \rho \mapsto (\rho(x_1), \dots, \rho(x_d)).$$

Нужно доказать, что образ этого отображения пересекает диагональ в $\Delta \subset \mathbb{R}^d$, где $\Delta = \{(t, t, \dots, t)\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Обозначим фактор $W = \mathbb{R}^d/\Delta$ и рассмотрим на нём действие G. Как представление группы G пространство W не имеет тривиальных слагаемых (то есть $W^G = 0$). Ему соответствует G-эквивариантное расслоение $\eta : W \times SO(d) \to SO(d)$ и препятствием к существованию введённого отображения g является эквивариантный класс Эйлера расслоения η.

Класс Эйлера этого расслоения не равен нулю в A_G, значит надо только доказать, что естественное отображение $A_G \to H_G^*(SO(d), Z_p)$ инъективно в размерности

$d-1$. Последнее доказывается рассмотрением спектральной последовательности из теоремы 24 с учётом того, что дифференциалы в этой последовательности должны отображать мультипликативные образующие алгебры $H^*(SO(d), Z_p)$ в классы Понтрягина и Эйлера соответствующего главного $SO(d)$-расслоения над BG (то есть все они трансгрессивны).

В работе Воловикова [43] доказывается гипотеза Кнастера для конфигурации из p^2 точек на некоторой окружности, расположенных в вершинах правильного многоугольника. В этой работе используется вычисление класса Эйлера соответствующего расслоения в K-теории, который оказывается ненулевым.

Кнастер сформулировал также более общий вариант своей задачи.

Гипотеза 3 (Обобщённая задача Кнастера, 1947)**.** *Для всякого непрерывного отображения $f : S^{d-1} \subset \mathbb{R}^m$ и всякого набора из $n = d - m + 1$ точек $x_1, \dots, x_k \in S^{d-1}$ найдётся вращение $\rho \in SO(d)$ такое, что*

$$f(\rho(x_1)) = f(\rho(x_2)) = \dots = f(\rho(x_n)).$$

Случай $m = d-1$ в этой гипотезе был ранее доказан Hopf [44]. Воловиковым в [27] доказан частный случай этой гипотезы: $m = 2$, $n = p^k$, в $\mathbb{R}^{n+1}$ есть некоторый базис $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$, такой что на множестве точек $\{x_i\}_{i=1}^n = \{e_i\}_{i=1}^n$ транзитивно действует группа $G = (Z_p)^k \subset SO(d+1)$.

Контрпримеры к обобщённой гипотезе Кнастера были найдены ещё раньше, чем к гипотезе Кнастера для функций. В работах Макеева, Бабенко, Богатого [45, 46] было замечено, что если конфигурация из n точек содержится в некотором линейном подпространстве $L \subseteq \mathbb{R}^d$ размерности l и выполняется неравенство

$$\frac{l(2n-l-1)}{2} < m(n-1)$$

то обобщённая гипотеза Кнастера неверна из соображений размерности для почти всех таких конфигураций. В работе [47] показано, что обобщённая гипотеза Кнастера неверна для специально построенных конфигураций точек и функций при любых $d-1 > m > 2$. В работе Hinrichs, Richter [39] построены контрпримеры к обобщённой задаче Кнастера при $m = 2$ и всех $d \geq 5$, а также получены новые контрпримеры в случае $m = 1$ (обычная задача Кнастера) при $d = 61, 63, 65$ и всех $d \geq 67$.

3.7. **Теория Люстерника-Шнирельмана для функций с симметриями.** Понятие индекса $(Z_p)^k$-пространств имеет также важное значение в теории Люстерника-Шнирельмана для критических точек функций с группой симметрий $G = (Z_p)^k$. Следуя книге [30] введём понятие эквивариантной категории Люстерника-Шнирельмана (в книге рассматривается более общее определение, чем приведённое здесь).

Определение 13. Пусть X — G пространство, тогда G-категорией X назовём минимальный размер G-инвариантного покрытия $\{X_1, \dots, X_n\}$ пространства X, в котором каждое вложение $\iota_i : X_i \to X$ G-гомотопно вложению некоторой орбиты $\iota : G/H \to X$. Будем обозначать G-категорию G-cat X.

Определённая так категория оценивает снизу число G-орбит критических точек G-инвариантной C^2-гладкой функции f на многообразии X, если функция f гладкая класса C^2, собственная и ограничена либо сверху, либо снизу.

На самом деле G-категория, как правило, оценивается снизу через G-род (род в смысле Шварца) пространства [23].

Определение 14. Пусть X — G пространство, тогда G-родом X назовём минимальное n, для которого существует G-отображение $X \to G/H_1 * G/H_2 * \dots * G/H_n$, где G/H_i изоморфны некоторым орбитам G на X. Будем обозначать G-род $\operatorname{G-gen} X$.

Основные результаты в этом направлении формулируются следующим образом [23, 30].

Теорема 26. *Если конечная группа G действует на X свободно, то*

$$\operatorname{G-gen} X \geq \overline{\operatorname{ind}}\, X + 1.$$

Теорема 27. *Пусть $G = (Z_p)^k$, тогда для любого G-пространства X без неподвижных точек*

$$\operatorname{G-gen} X \geq \left\lceil \frac{\underline{\operatorname{ind}}\, X}{2} \right\rceil + 1,$$

причём если $p = 2$, то

$$\operatorname{G-gen} X \geq \underline{\operatorname{ind}}\, X + 1.$$

В работе Воловикова [48] (см. также [36]) введён ещё один численный индекс $(Z_p)^k$-действия $i_G(X)$, определяемый через спектральную последовательность теоремы 24 и обладающий свойством $i_G(X) \leq \underline{\operatorname{ind}}\, X + 1$. Этот индекс оценивает G-род следующим образом.

Теорема 28. *Пусть $G = (Z_p)^k$, тогда для любого компактного G-пространства X без неподвижных точек*

$$\operatorname{G-gen} X \geq i_G(X).$$

Заметим, что теорема Люстерника-Шнирельмана о покрытии в терминах категории (или рода) формулируется так: для антиподального действия $G = Z_2$ на сфере S^n категория $\operatorname{G-cat} S^n \geq \operatorname{G-gen} S^n \geq n + 1$.

4. Топологические методы и обобщения классических теорем комбинаторной геометрии

4.1. **Топологические методы оценки хроматического числа графов и гиперграфов.**

Обозначим множество всех k-элементных подмножеств $[n]$ через $\binom{[n]}{k}$.

Определение 15. *Графом Кнезера* KG_n^k называется граф, вершинами которого являются множества из $\binom{[n]}{k}$, причём два множества соединены ребром тогда и только тогда, когда они не пересекаются.

Определение 16. *Хроматическим числом* графа G называется минимальное количество цветов, в которые надо покрасить вершины графа так, чтобы концы каждого ребра были покрашены в разные цвета (*правильная раскраска*). Хроматическое число обозначается $\chi(G)$.

Определение 17. *Гиперграфом* на вершинах V называется множество V и некоторое семейство $\mathcal{F}$ непустых подмножеств V (*рёбер* или *гиперрёбер*). Гиперграф называется k-гиперграфом, если все множества $\mathcal{F}$ имеют размер k. Часто гиперграф будет обозначаться множеством своих рёбер, если понятно, какое множество является множеством вершин.

Определение 18. Для гиперграфа $\mathcal{F}$ на вершинах V и непустого подмножества $W \subseteq V$ *индуцированным гиперграфом* $\mathcal{F}[W]$ называется гиперграф с вершинами W и рёбрами $\{F \in \mathcal{F} : F \subseteq W\}$.

Определение 19. *Хроматическим числом гиперграфа* называется минимальное количество цветов, в которые нужно покрасить его вершины так, чтобы ни одно из его рёбер не было одноцветным. Будем обозначать хроматическое число $\chi(\mathcal{F})$.

Следующее утверждение было сформулировано Кнезером [49] и доказано Lovász [50].

Теорема 29 (Lovász, 1978)**.** *Если $n \geq 2k-1$, то*

$$\chi(KG_n^k) = n - 2k + 2.$$

Оценка сверху (построение раскраски) в этой теореме доказывается просто, оценка же снизу потребовала применения топологических методов, в одном из вариантов была применена обобщённая теорема Борсука-Улама для Z_2-действия. Этот результат важен в теории графов потому, что оценка снизу хроматического числа графа Кнезера с помощью линейного программирования, известная как «fractional chromatic number», даёт $\frac{n}{k}$, что очень сильно отличается от настоящего хроматического числа.

В работе Bárány [51] было приведено более геометрическое доказательство теоремы 29, основанное на вложении конфигурации вершин в $\mathbb{R}^{n-2k+2}$ и применении теоремы Борсука-Люстерника-Шнирельмана. В работе Дольникова [52] было использовано вложение в $\mathbb{R}^{n-2k+1}$ и теорема 29 была обобщена следующим образом.

Определение 20. *Кнезеровский граф* $KG(\mathcal{F})$ гиперграфа $\mathcal{F}$ имеет множество вершин, совпадающее с семейством $\mathcal{F}$, две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие гиперрёбра $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ не пересекаются.

Определение 21. *Хроматическим дефектом* гиперграфа $\mathcal{F}$ на множестве вершин V называется число

$$\mathrm{cd}_m(\mathcal{F}) = \min\{|X| : \chi(\mathcal{F}[V \setminus X]) \le m\}.$$

Теорема 30 (Дольников, 1981). *Для всякого гиперграфа $\mathcal{F}$ имеем*

$$\chi(KG(\mathcal{F})) \ge \mathrm{cd}_2(\mathcal{F}).$$

Доказательство этого утверждения использует частный случай теоремы Дольникова о трансверсалях, подробнее см. раздел 5.3. Оценка $\mathrm{cd}_2(\binom{[n]}{k}) = n - 2k + 2$ очевидна.

Оригинальное доказательство теоремы 29 было основано на следующем утверждении.

Определение 22. Для графа $G = (V, E)$ обозначим $\mathcal{N}(G)$ симплициальный комплекс с вершинами V и симплексами, соответствующими наборам вершин, имеющим общего соседа. Соответствующее англоязычное название «neighborhood complex».

Теорема 31 (Lovász, 1978). *Если $\tilde{H}^i(\mathcal{N}(G), Z_2) = 0$ при $i \le k-1$, то $\chi(G) \ge k+2$.*

Естественно, в основе доказательства этой теоремы лежит некоторое Z_2-действие и его индекс. Изложим соответствующие рассуждения более подробно, следуя работе [53].

Определение 23. Для графа $G = (V, E)$ обозначим $\mathcal{B}(G)$ симплициальный комплекс с вершинами, состоящими из двух копий V_1 и V_2 множества V и симплексами, соответствующими парам $W_1 \subseteq V_1, W_2 \subseteq V_2$ таким, что каждое из множеств W_1 и W_2 имеет общего соседа и любые две вершины $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$ соединены в G. Соответствующее англоязычное название «box complex».

Комплекс $\mathcal{B}(G)$ функториален относительно G и имеет естественное Z_2-действие перестановками пар подмножеств. Для полного графа K_n на n вершинах комплекс $\mathcal{B}(K_n)$ гомотопически эквивалентен $n-2$-мерной сфере с антиподальным действием Z_2. Эти и некоторые другие соображения позволяют доказать теорему [53].

Теорема 32 (Alon, Frankl, Lovász, 1986). *Комплекс $\mathcal{B}(G)$ гомотопически эквивалентен $\mathcal{N}(G)$ и*

$$\chi(G) \ge \underline{\mathrm{ind}}_{Z_2} \mathcal{B}(G) + 2.$$

В книге Козлова [54] понятие комплекса $\mathcal{B}(G)$ было обобщено: введено понятие полиэдрального комплекса гомоморфизмов графов $\mathrm{Hom}(G, H)$, вершинами которого являются собственно гомоморфизмы графов. Всякое отображение (раскраска) $G \to K_n$ индуцирует отображение $\mathrm{Hom}(H, G) \to \mathrm{Hom}(H, K_n)$ для любого графа H, при этом описанный выше комплекс $\mathcal{B}(G)$ с точки зрения оценки хроматического числа эквивалентен комплексу $\mathrm{Hom}(K_2, G)$ с действием группы Z_2 перестановками двух вершин K_2. Рассматривая другие графы H с Z_2-действием, Козлов получает новые оценки хроматического числа в терминах Z_2-индекса соответствующих Hom-комплексов.

В работе [53] также были введены аналоги комплекса $\mathcal{B}(G)$ для гиперграфов и понятие графа Кнезера и его хроматического числа было обобщено следующим образом.

Определение 24. Для всякого гиперграфа $\mathcal{F}$ кнезеровский r-гиперграф $KG_r(\mathcal{F})$ построен на $\mathcal{F}$ как на вершинах, а его рёбра — это наборы из r попарно непересекающихся подмножеств $F_1, F_2, \dots, F_r \in \mathcal{F}$.

Для системы $\mathcal{F} = \binom{[n]}{k}$ в [53] доказано следующее утверждение.

Теорема 33 (Alon, Frankl, Lovász, 1986). *Положим $\mathcal{F} = \binom{[n]}{k}$. Если $n \geq (m-1)(r-1) + rk$, то*

$$\chi(KG_r(\mathcal{F})) > m.$$

В работах [55, 56] было установлено обобщение результата Дольникова.

Теорема 34 (Kříž, 1992–2000). *Для всякого гиперграфа $\mathcal{F}$*

$$\chi(KG_r(\mathcal{F})) \geq \frac{1}{r-1} \operatorname{cd}_r(\mathcal{F}).$$

Все эти результаты существенно используют топологические соображения, в том числе теоремы типа Борсука-Улама для Z_p-действия.

В работе Ziegler [57] эти результаты и их обобщения доказываются «комбинаторно», однако на самом деле просто формулируется соответствующий аналог леммы Такера для Z_p-действия на симплициальных комплексах, вычисляются когомологии, но все рассуждения проводятся без явного использования топологических пространств.

В работе Воловикова [58] рассматриваются комплексы гомоморфизмов q-гиперграфов $(q = p^k)$ с $(Z_p)^k$-действием и формулируются некоторые нижние оценки хроматического числа гиперграфов в терминах индексов соответствующих $(Z_p)^k$-пространств.

4.2. Теорема Тверберга, «цветные» теоремы Каратеодори и Хелли.

Теорема 35 (Тверберг [59], 1966). *Пусть конечное множество $X \in \mathbb{R}^d$ состоит из $(d+1)(r-1)+1$ точек. Тогда X можно разбить на r множеств $X_1, \dots, X_r$, выпуклые оболочки которых имеют общую точку.*

Теорема Тверберга одновременно обобщает теорему Радона и дискретную теорему о центральной точке.

Один из самых простых способов доказать теорему Тверберга — использование «цветной» теоремы Каратеодори из [60].

Теорема 36 (Цветная теорема Каратеодори, Bárány, 1982). *Пусть даны $d+1$ конечное множество $X_1, \dots, X_{d+1}$ в $\mathbb{R}^d$. Тогда для всякой точки $x \in \bigcap_{i=1}^{d+1} \operatorname{conv} X_i$ найдётся система представителей $x_i \in X_i$, для которой*

$$x \in \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_{d+1}\}.$$

Также в работе [60] со ссылкой на Lovász была приведена «цветная» теорема Хелли.

Теорема 37 (Цветная теорема Хелли, Bárány, Lovász, 1982). *Пусть в $\mathbb{R}^d$ даны $d+1$ конечное непустое семейство выпуклых множеств $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{d+1}$. Если для любой системы представителей $C_i \in \mathcal{F}_i$ пересечение $\bigcap_{i=1}^{d+1} C_i$ непусто, то для некоторого i пересечение семейства $\bigcap \mathcal{F}_i$ непусто.*

В контексте цветных теорем Каратеодори и Хелли была сформулирована следующая гипотеза.

Гипотеза 4 (Цветная теорема Тверберга, Bárány)**.** *Предположим, что конечное множество X из $r(d+1)$ точки в $\mathbb{R}^d$ раскрашено в $d+1$ цвет так, что точек каждого цвета ровно r. Тогда X можно разбить на r полноцветных подмножеств $X_1, \ldots, X_r$ из $d+1$ точки каждое так, что $\bigcap_{i=1}^r \operatorname{conv} X_i \neq \emptyset$.*

В работе Bárány и Larman [61] приведено доказательство этой гипотезы для $r = 2$ со ссылкой на Lovász, а также эта гипотеза была доказана для $d = 2$ с помощью чисто геометрического рассуждения. В разделе 4.4 будут обсуждаться топологические доказательства ослабленных вариантов этой гипотезы.

4.3. **Интерпретация теорем существования в терминах препятствий и относительный класс Эйлера.** Как уже было указано, некоторые геометрические теоремы существования можно сформулировать в терминах существования нулей сечения некоторого (эквивариантного) векторного расслоения. Основной способ убедиться в наличие нулей сечения векторного расслоения — доказать, что класс Эйлера расслоения не равен нулю.

Вычисление класса Эйлера может быть основано на явном описании когомологий, как это делается для G-эквивариантных расслоений, индуцированных из представлений группы G (см. разделы 3.5 и 3.6). Однако есть и более простой способ вычислить класс Эйлера, основанный на следующем наблюдении.

Лемма 1. *Пусть X — n-мерное замкнутое гладкое многообразие, $\pi_V : V \to X$ — k-мерное векторное расслоение. Если X и V ориентируемы, то используем коэффициенты $A = \mathbb{Z}$, иначе $A = Z_2$. Тогда для общего сечения $s : X \to V$ многообразие нулей сечения двойственно по Пуанкаре классу Эйлера $e(V)$.*

Лемма 1 даёт удобный способ вычисления класса Эйлера, если $k = n$. Тогда надо выбрать сечение расслоения V, которое имело бы только простые нули, что по определению означает: $s(X)$ трансверсально нулевому сечению $s_0(X)$. В случае $A = Z_2$ класс Эйлера соответствует чётности количества этих нулей. Если же $A = \mathbb{Z}$, то для всякого нуля надо локально представить сечение в правильно ориентированных координатах $(x_1, \ldots, x_n)$ на X и $(y_1, \ldots, y_n)$ на слое V в виде

$$y_i = \sum a_{ij} x_j + o(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2})$$

и назначить такому нулю индекс $\operatorname{sgn} \det(a_{ij})$. Тогда класс Эйлера V соответствует сумме индексов всех нулей. Этот метод называется методом *тестовых сечений.*

В приложении к конкретным геометрическим задачам метод тестовых сечений позволяет рассмотреть какой-то конкретный экземпляр задачи, для которого все нули сечения легко описываются, убедиться, что класс Эйлера ненулевой, и сделать отсюда вывод о существовании нулей во всех экземплярах задачи. Этот метод широко применяется в задачах о вписывании/описывании (см. раздел 4.6) и в некоторых других случаях (см. раздел 5.2).

Многообразие в методе тестовых сечений может быть некомпактно. Тогда класс Эйлера следует рассматривать в когомологиях с компактным носителем, но он будет зависеть не только от расслоения, но и от поведения сечения «на бесконечности». Для уточнения этих соображений полезно ввести понятие относительного класса Эйлера.

В первую очередь следует заметить, что относительный класс Эйлера относится не только к расслоению, но и к выбору конкретного сечения. Далее в этом разделе, если не оговорено иначе, для ориентируемых расслоений рассматриваются когомологии с целыми коэффициентами, если же расслоение может быть неориентируемым, то рассматриваются когомологии с коэффициентами в Z_2. Обозначение кольца коэффициентов опускается.

Определение 25. Рассмотрим пару пространств $Y \subseteq X$ и m-мерное векторное расслоение $\pi_V : V \to X$. Пусть также задано не обращающееся в нуль сечение s расслоения V над Y. Назовём такую конструкцию (V, s) *частичным сечением.*

В некоторых случаях будем считать, что сечение s как-то продолжено на все пространство X. Естественно, в этом случае оно может обращаться в нуль на $X \setminus Y$. Но любые два продолженных сечения можно соединить между собой гомотопией, при которой гомотопия не будет менять сечение над Y.

Нетрудно доказать, что частичные сечения над парой (X, Y) гомотопически классифицируются отображениями пары (X, Y) в пару $(BO(m), BO(m-1))$, или $(BSO(m), BSO(m-1))$ в случае ориентируемых расслоений.

Для пары $(BO(m), BO(m-1))$ существует следующая явная конструкция. Рассмотрим каноническое m-мерное векторное расслоение $\gamma \to BO(m)$. Тогда пара $(B(\gamma), S(\gamma))$ является одной из возможных реализаций $(BO(m), BO(m-1))$. Изоморфизм Тома показывает, что существует $u \in H^m(BO(m), BO(m-1))$ такой, что умножение элементов $H^*(BO(m))$ на u даёт изоморфизм когомологий с коэффициентами в Z_2

$$H^*(BO(m), BO(m-1)) = uH^*(BO(m)).$$

Такая же ситуация имеет место для пары $(BSO(m), BSO(m-1))$ и когомологий с целыми коэффициентами.

Определение 26. Образ класса Тома $u \in H^m(BO(m), BO(m-1), Z_2)$ в $H^m(X, Y, Z_2)$ будем называть классом Эйлера по модулю 2 частичного сечения. В ориентируемом случае образ класса Тома $u \in H^m(BSO(m), BSO(m-1), \mathbb{Z})$ в $H^m(X, Y, \mathbb{Z})$ будем называть классом Эйлера частичного сечения. Будем обозначать класс Эйлера частичного сечения $e(V, s)$.

Следующая лемма следует из определений классов Тома и Эйлера. Несвязное объединение топологических пространств X и Y обозначим $X \sqcup Y$.

Лемма 2. *Для пары пространств $(X \sqcup \mathrm{pt}, \mathrm{pt})$ относительный класс Эйлера расслоения $V \to X \sqcup \mathrm{pt}$ с любым сечением над pt в $\tilde{H}^*(X \sqcup \mathrm{pt}, \mathrm{pt}) = H^*(X)$ совпадает с обычным классом Эйлера ограничения этого расслоения на X.*

Из определения ясно, что класс Эйлера является первым препятствием (возможно, по модулю 2) к продолжению частичного ненулевого сечения до полного ненулевого сечения. Именно это свойство относительного класса Эйлера и нужно в геометрических приложениях.

Определение 27. Пусть над (X_1, Y_1) дано частичное сечение (V, s_1), а над (X_2, Y_2) дано частичное сечение (W, s_2). Будем считать сечения s_i продолженными на X_i. Тогда в произведении расслоений $V \times W$ сечение $s_1 \times s_2$ даёт частичное сечение над парой $(X_1 \times X_2, (X_1 \times Y_2) \cup (Y_1 \times X_2))$. Назовём эту операцию *произведением частичных сечений.*

Следующая лемма выводится из рассмотрения классифицирующих пространств и мультипликативности класса Тома.

Лемма 3. *Имеет место формула*

$$e(V \times W, s_1 \times s_2) = e(V, s_1) \times e(W, s_2).$$

В частности, если $X_1 = X_2 = X$, то для пары частичных сечений s_1 и s_2 над (X, Y_1) и (X, Y_2) имеем

$$e(V \oplus W, s_1 \oplus s_2) = e(V, s_1)e(W, s_2) \in H^*(X, Y_1 \cup Y_2).$$

Перейдём к формулировке утверждения о двойственности для относительного класса Эйлера. Пара (X, Y) является относительным многообразием, если X и Y — симплициальные комплексы, Y является подкомплексом X, $X \setminus Y$ — топологическое многообразие. В частности пара из компактного гладкого многообразия и его края $(M, \partial M)$ является относительным многообразием. n-мерное относительное многообразие (X, Y) ориентируемо, если есть класс $w \in H^n(X, Y, \mathbb{Z})$, который имеет ненулевой прообраз в группе $H^n(X, X \setminus x_0, \mathbb{Z})$ для каждой $x_0 \in X \setminus Y$.

Относительное многообразие (X, Y) назовём гладким, если $X \setminus Y$ — гладкое многообразие. Собственно, мы рассматриваем только гладкие относительные многообразия. Частичное сечение (продолженное на всё X) расслоения $V \to X$ назовём общим, если многообразие $s(X \setminus Y) \subset V$ трансверсально нулевому сечению $s_0(X \setminus Y)$.

Лемма 4. *Пусть (X, Y) — n-мерное гладкое относительное многообразие, $\pi_V : V \to X$ — k-мерное векторное расслоение. Если (X, Y) и V ориентируемы, то используем коэффициенты $A = \mathbb{Z}$, иначе $A = Z_2$. Тогда для общего частичного сечения $s : X \to V$ (продолженного на всё X) многообразие нулей сечения, как класс из $H_{n-k}(X \setminus Y)$, двойственно по Пуанкаре-Лефшецу классу Эйлера $e(V, s)$.*

В относительном случае эта лемма также даёт возможность вычислять относительный класс Эйлера методом тестовых сечений.

В качестве примера использования относительного класса Эйлера приведём доказательство теоремы Брауэра.

Доказательство теоремы Брауэра. Рассмотрим непрерывное отображение шара $f : B \to B$. Если оно не имеет неподвижных точек, то отображение

$$s(x) = f(x) - x$$

даёт частичное сечение тривиального расслоения над парой $\eta : B \times \mathbb{R}^d \to (B, \partial B)$. Хотя само расслоение η тривиально, мы покажем, что $e(\eta, s) \neq 0 \in H^d(B, \partial B)$. Действительно, сечение $s(x)$ можно непрерывно деформировать в сечение $s'(x) = -x$, при этом на ∂B эта деформация не будет обращать сечение в нуль. Но у сечения s' ровно один невырожденный нуль, следовательно класс Эйлера ненулевой. □

Наличие гомологического препятствия (в виде класса Эйлера) позволяет построить практически эффективные алгоритмы для реализации геометрических теорем существования, что сделано, в частности, в работах Eaves, Kellogg, Li, Yorke [62, 63] именно для теоремы Брауэра.

Применение гомологических препятствий в вычислительных алгоритмах основано на *методе гомотопического продолжения* (англоязычный термин «homotopy continuation»), в основе которого лежит следующее утверждение.

Теорема 38 (О гомотопическом продолжении). *Пусть расслоение $V \to X$ имеет ненулевой класс Эйлера. Пусть также гомотопия s_t связывает два сечения этого расслоения s_0 и s_1. Тогда в пространстве гомотопии $X \times [0,1]$ некоторая компонента множества нулей сечения s_t пересекается и с $X \times \{0\}$, и с $X \times \{1\}$.*

Для относительного класса Эйлера формулировка аналогична. В случае, если X является многообразием размерности n, слои V также имеют размерность n, и сечение s_t находится в общем положении, утверждение теоремы говорит о том, что некоторый нуль s_0 связан гладкой кривой с некоторым нулём s_1 в пространстве $X \times [0,1]$. Это наблюдение позволяет построить эффективные вычислительные алгоритмы для нахождения некоторых нулей произвольного сечения s_1, если для некоторого фиксированного сечения s_0 все нули известны.

4.4. **Топологические теоремы типа Тверберга, обобщения теоремы ван Кампена-Флореса.** Теорему Тверберга можно сформулировать следующим образом: если $f : \Delta^{(d+1)(r-1)} \to \mathbb{R}^d$ — линейное отображение, то найдутся r попарно непересекающихся граней $F_1, \dots, F_r$ симплекса $\Delta^{(d+1)(r-1)}$, для которых $\bigcap_{i=1}^r f(F_i) \neq \emptyset$.

Обобщения теоремы Тверберга связаны с тем, что вместо $\Delta^{(d+1)(r-1)}$ можно взять другой симплициальный комплекс, а вместо линейного отображения — непрерывное, последний случай называется топологической теоремой типа Тверберга.

В частности, в цветной теореме (гипотезе) Тверберга рассматривается $d+1$-кратный джойн r-элементного множества $K = [r]^{*d+1}$, в теореме ван Кампена-Флореса рассматривается остов симплекса и непрерывное отображение.

Определение 28. Если для комплекса K верна линейная теорема Тверберга с параметрами r, d, то скажем, что $K \in LT(r,d)$. Если верна топологическая теорема с теми же параметрами, то $K \in TT(r,d)$.

Топологическая теорема Тверберга для $\Delta^{(d+1)(r-1)}$ и r простого была доказана в работе Bárány, Shlosman, Szücs [64]. Эта теорема и теорема ван Кампена-Флореса были обобщены в работах Воловикова [25, 65] для степеней простых.

Теорема 39 (Bárány, Shlosman, Szücs, Воловиков, 1981–1996)**.** *Если r — степень простого, то $\Delta^{(d+1)(r-1)} \in TT(r,d)$.*

Теорема 40 (Sarkaria, Воловиков, 1991–1996)**.** *Если r — степень простого и для натуральных чисел r,k,d выполняется неравенство*

$$d(r-1) \leq rk,$$

то $\Delta_k^{r(k+2)-2} \in TT(r,d)$.

Последняя теорема доказана для простых r в работе Sarkaria [66]. В работе Воловикова [65] она доказана для степеней простого и в более общей формулировке: рассматриваются отображения не только в $\mathbb{R}^d$, но и в произвольное d-мерное многообразие (с некоторым условием на тривиальность отображения когомологий). Кроме того, совпадения ищутся не только в наборах попарно непересекающихся граней, но и для наборов граней, у которых никакие j не имеют общей точки (при некотором фиксированном j).

В работе [67] (см. также [68]) был доказан следующий ослабленный вариант цветной теоремы Тверберга.

Теорема 41 (Živaljević, Vrećica, 1992)**.** *Пусть $K = [t]^{*d+1}$, r — степень простого и $t \geq 2r-1$. Тогда $K \in TT(r,d)$.*

На самом деле в работе [67] этот результат был доказан только для простых r, но с учётом результатов Воловикова [25] доказательство проходит и для степеней простого. Это утверждение любопытно тем, что пока не придумано доказательство даже его линейного аналога, не использующее топологических соображений. Иначе говоря, топологические методы в этой теореме являются существенными.

Ограничение на наличие степени простого числа в топологических теоремах типа Тверберга пока не удалось снять, в частности, гипотеза о том, что $\Delta^{(d+1)(r-1)} \in TT(r,d)$ для r, не являющихся степенью простого, остаётся открытой.

Кратко сформулируем основные идеи доказательства теорем типа Тверберга.

Определение 29. Для симплициального комплекса K на вершинах V вырезанным r-кратным джойном назовём комплекс, множество вершин которого равно $[r] \times V$, а множество симплексов состоит из всевозможных множеств

$$\{1\} \times \sigma_1 \cup \{2\} \times \sigma_2 \cup \dots \cup \{r\} \cup \sigma_r,$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ — набор попарно непересекающихся симплексов из K. Вырезанный r-кратный джойн обозначается K_Δ^{*r}.

Аналогично вместо запрета попарных пересечений симплексов можно наложить запрет на пересечения по k штук, тогда получим k-вырезанный r-кратный джойн $K_{\Delta(k)}^{*r}$. Также можно определить вырезанные степени и джойны для топологических пространств.

Очевидно, на r-кратных джойнах перестановками копий множества вершин V действует группа $G = (Z_p)^k$ (при $r = p^k$), на вырезанных джойнах это действие не имеет неподвижных симплексов. В сформулированных обозначениях $K \in TT(r,d)$ будет выполняться, если не существует G-отображения $K_\Delta^{*r} \to (\mathbb{R}^d)^{*r}_{\Delta(r)}$, причём последнее пространство гомотопически эквивалентно сфере $(d+1)(r-1)$-мерного G-расслоения без тривиальных слагаемых. Таким образом связь в вычислением класса Эйлера и индекса G-действия очевидна. В цитированных результатах нетривиальность класса Эйлера устанавливалась исходя из оценки индекса $(Z_p)^k$-пространства через связность этого пространства.

В некоторых публикациях используется не вырезанный r-кратный джойн симплициального комплекса, а вырезанное r-кратное произведение, определяемое аналогично. Несмотря на другую конструкцию, такая модификация приводит к тем же результатам.

4.5. **Двойственные теоремы о центральной точке и Тверберга.** Зафиксируем некоторые определения и обозначения, которые будут использоваться в этом разделе и в разделе 5.

Определение 30. Аффинное подмногообразие $\mathbb{R}^d$ размерности k будем называть *k-плоскостью*, $d-1$-плоскость будем называть *гиперплоскостью.*

Определение 31. Множество k-плоскостей, пересекающих данное множество $X \subseteq \mathbb{R}^d$, обозначим $I(X,k)$.

Приведём некоторые результаты работы автора [69].

Теорема 42 (Карасёв, 2008)**.** *Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано семейство $\mathcal{F}$ из n гиперплоскостей общего положения. Тогда найдётся точка x такая, что всякий проходящий через неё луч пересекает как минимум $\left\lfloor \frac{n+d}{d+1} \right\rfloor$ гиперплоскостей из $\mathcal{F}$.*

Под общим положением семейства гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$ подразумевается, что любые d имеют ровно одну общую точку, а любые $d+1$ не имеют общей точки. В следующем утверждении используется параметризация пространства плоскостей из раздела 5.2.

Теорема 43 (Карасёв, 2008)**.** *Пусть на многообразии гиперплоскостей γ_d^1 задана абсолютно непрерывная вероятностная мера μ с компактным носителем. Тогда найдётся точка x такая, что для всякого луча r с началом в x*

$$\mu(I(r,d-1)) \geq \frac{1}{d+1}.$$

Определение 32. Будем говорить, что $d+1$ гиперплоскость $h_1,\dots,h_{d+1}$ общего положения в $\mathbb{R}^d$ образует симплекс S, если S является выпуклой оболочкой множества точек $\{x_i\}$, определяемых как

$$x_i = \bigcap_{j\neq i} h_j.$$

Очевидно, что каждая гипергрань S лежит на соответствующей гиперплоскости h_i.

Гипотеза 5 (Двойственная теорема Тверберга)**.** *Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано семейство из $(d+1)n$ гиперплоскостей общего положения. Тогда их можно разбить на наборы из $d+1$ гиперплоскости так, что все симплексы, образованные наборами, имеют общую точку.*

В работе автора [69] эта гипотеза сформулирована и доказана для $d = 2$ и в следующем частном случае.

Теорема 44 (Карасёв, 2008)**.** *Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано семейство из $(d+1)n$ гиперплоскостей общего положения, причём $n = p^k$, где p — простое число.*

Тогда эти гиперплоскости можно разбить на n непересекающихся наборов из $d+1$ гиперплоскости так, что все симплексы, образованные наборами, имеют общую внутреннюю точку.

Также в этой работе доказана двойственная версия цветной теоремы Тверберга.

Теорема 45 (Карасёв, 2008)**.** *Пусть в $\mathbb{R}^d$ дано семейство из $(d+1)t$ гиперплоскостей общего положения, где $t \geq 2r-1$, $r = p^k$, p — простое число. Пусть эти гиперплоскости разбиты на $d+1$ семейство (цвет) по t элементов.*

Тогда из данных гиперплоскостей можно выбрать r непересекающихся наборов из $d+1$ гиперплоскости так, что все симплексы, образованные наборами, имеют общую внутреннюю точку и каждый набор разноцветный, то есть не содержит пары одноцветных гиперплоскостей.

Доказательство двойственной теоремы о центральной точке основано на применении аналога теоремы Брауэра о неподвижной точке. Двойственные теоремы типа Тверберга доказываются с помощью построения препятствия в виде класса Эйлера. По сути построенное препятствие является прямым произведением препятствий из топологической (цветной) теоремы Тверберга и препятствия из теоремы Брауэра.

Также в работе [69] доказываются двойственные теоремы о центральной трансверсали (см. раздел 5.5).

4.6. **Теоремы существования для вписанных и описанных фигур.** Приведём некоторые результаты о вписывании и описывании фигур.

Определение 33. Многогранник P *подобно (гомотетично, конгруэнтно, аффинно) вписывается* в выпуклое тело T, если существует преобразование подобия (гомотетия, движение, аффинное преобразование) ρ, для которого все вершины $\rho(P)$ лежат на ∂T.

Определение 34. Многогранник P *подобно (гомотетично, конгруэнтно, аффинно) описывается* около выпуклого тела T, если существует преобразование подобия (гомотетия, движение, аффинное преобразование) ρ, для которого $\rho(P) \supseteq T$ и T пересекает каждую гипергрань $\rho(P)$.

В задачах на вписывание многогранника удобно рассматривать гладкие тела, а в задачах на описывание многогранника — строго выпуклые. Более общие же результаты, как правило, получаются предельным переходом, но в некоторых случаях при предельном переходе не удаётся доказать, что последовательность вписанных/описанных фигур не стремится к вырождению.

Типичным примером является теорема Шнирельмана, в которой пока не известно, верна ли она для произвольной непрерывной замкнутой кривой без самопересечений (жордановой кривой). Если жорданова кривая в окрестности каждой точки является графиком непрерывной функции в некоторой системе координат, то предельный переход проходит, а в общем случае предельный переход может привести к вырождению вписанного квадрата. С другой стороны, в теореме Какутани предельный переход проходит всегда, так как куб не может выродиться в точку или устремиться к бесконечно большому кубу.

Доказательство теоремы Шнирельмана имеет любопытную историю. Собственно в статье Шнирельмана [16] доказательство было в принципе неверным. В работе Guggenheimer [71] была сделана попытка исправить доказательство Шнирельмана, однако основная лемма о непрерывной зависимости вписанного квадрата от кривой принципиально неверна и к ней существуют простые контрпримеры. Также в указанной статье Guggenheimer был приведён план доказательства вписываемости правильного кросcполитопа в произвольное гладкое выпуклое тело, однако этот план опирался на обобщаемость основной леммы на случай размерности $d \geq 3$.

В работе Jerrard [72] было приведено в целом правильное доказательство теоремы Шнирельмана, однако автор ограничился рассмотрением случая аналитических кривых. Кроме того, в этой работе было приведено утверждение, являющееся частным случаем теоремы 38 (о гомотопическом продолжении), это утверждение показывает, что непрерывной зависимости вписанного квадрата от кривой нет, однако имеет место «гомотопически непрерывная» зависимость.

В работе Пака [73] приведено доказательство теоремы Шнирельмана для случая простых замкнутых ломаных. Кроме того, доказательство теоремы Шнирельмана, основанное на методе тестовых сечений, известно Макееву. Для полноты изложения приведём доказательство теоремы Шнирельмана, основанное на идеях Макеева и изложенное более строго с использованием введённой выше терминологии.

Доказательство теоремы Шнирельмана. Рассмотрим некоторую ориентированную гладкую кривую $C \in \mathbb{R}^2$.

Обозначим X конфигурационное пространство наборов из 4 точек (p_1, p_2, p_3, p_4) на кривой, таких что они занумерованы в порядке обхода кривой, между точками возможны совпадения. Обозначим $Y \subset X$ пространство вырожденных конфигураций, в которых некоторые точки совпадают.

Теперь построим отображение $f : X \to \mathbb{R}^6$, заданное покоординатно как

$$x_1 = |p_2 - p_1|, \quad x_2 = |p_3 - p_2|, \quad x_3 = |p_4 - p_3|, \quad x_4 = |p_1 - p_4|,$$
$$x_5 = |p_3 - p_1|, \quad x_6 = |p_4 - p_2|$$

Рассмотрим подпространство $L \in \mathbb{R}^6$, натянутое на векторы $(1, 1, 1, 1, 0, 0)$ и $(0, 0, 0, 0, 1, 1)$ и соответствующее факторпространство $V = \mathbb{R}^6/L$. Отображение f факторизуется до отображения $g : X \to V$.

Отображение g перестановочно с действием группы Z_4. Действие Z_4 на X задаётся циклическими перестановками точек p_i, действие на V задаётся циклическими перестановками координат $x_1, \dots, x_4$ и перестановками координат x_5, x_6 факторгруппой $Z_4/Z_2 = Z_2$. Таким образом, g можно рассматривать как сечение Z_4-расслоения. Понятно, что для доказательства наличия вписанного в C квадрата надо доказать, что g имеет нуль на $X \setminus Y$.

Прямое применение класса Эйлера невозможно, так как построенное сечение g имеет нули на Y, соответствующие конфигурациям, в которых $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$. Рассмотрим пространство $X_\varepsilon \subset X$, в котором расстояние (в смысле параметра на кривой) между каждой парой точек не менее ε, и его подпространство Y_ε, в котором расстояние между некоторыми парами равно ε. Из гладкости кривой C следует, что для достаточно малых ε сечение g не имеет нулей на Y_ε. Имеет смысл относительный класс Эйлера $e(g) \in H^4_{Z_4}(X_\varepsilon, Y_\varepsilon, Z_2)$.

Заметим, что при непрерывной деформации кривой C, оставляющей её гладкой, ε из предыдущего абзаца можно выбрать одинаковым для всех кривых деформации. Следовательно, при деформации построенный класс Эйлера не изменяется. Кривую можно деформировать, сохраняя гладкость, в эллипс с разными полуосями. Легко проверить, что сечение g в этом случае имеет ровно один невырожденный нуль на $(X_\varepsilon \setminus Y_\varepsilon)/Z_4$, следовательно по лемме 4 класс Эйлера $e(g)$ не нулевой. $\square$

Следующая теорема Громова [70] существенно использует топологическую технику в доказательстве.

Теорема 46 (Громов, 1969). *Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ — d-мерный симплекс, а компакт $T \subset \mathbb{R}^d$ имеет C^1-гладкую границу и ненулевую эйлерову характеристика $\chi(T) \neq 0$. Тогда Δ положительно гомотетично вписывается в T.*

В диссертации Макеева [74] доказано следующее обобщение теоремы Шнирельмана для трёхмерного случая.

Теорема 47 (Макеев, 2003). *Пусть C — правильный октаэдр в $\mathbb{R}^3$, а T — гладкое выпуклое тело. Тогда C подобно вписывается в T.*

Грюнбаумом была сформулирована следующая гипотеза.

Определение 35. Для множества $S \in \mathbb{R}^d$ обозначим его разностное множество

$$S - S = \{x - y : x, y \in S\}.$$

Если S — выпуклое множество, то $S - S$ — тоже выпуклое.

Гипотеза 6 (Грюнбаум). *Пусть Δ — симплекс в $\mathbb{R}^d$, $Q = \Delta - \Delta$ — разностное множество симплекса, а $T \subset \mathbb{R}^d$ — гладкое выпуклое тело. Тогда Q аффинно вписывается в T.*

В работе Макеева [75] эта гипотеза доказана для $d = 3$. Доказательство основано на рассмотрении пространства всех возможных аффинных преобразований ρ, построения над ним расслоения, сечение которого должно обратиться в нуль для решения задачи и вычислении эквивариантного класса Эйлера расслоения с помощью тестовых сечений. Макеевым также были рассмотрены случаи негладких T.

Отметим связь между задачами об описывании и проблемой (гипотезой) Борсука.

Теорема 48 (Pal, Eggleston [76, 77], 1920–1958)**.** *Всякий компакт $K \in \mathbb{R}^d$ может быть вложен в тело постоянной ширины, равной диаметру K.*

В соответствии с предыдущим результатом, если некоторый многогранник P конгруэнтно описывается вокруг всякого выпуклого тела T постоянной ширины 1, то для решения проблемы Борсука достаточно разбить P на части диаметра, меньшего 1. В таком случае, как правило, требуется не описываемость в определённом выше смысле, а достаточно, чтобы всякое тело T постоянной ширины 1 можно было движением поместить в P.

Определение 36. Пусть P — выпуклое тело в $\mathbb{R}^d$. Если для всякого тела T постоянной ширины 1 в $\mathbb{R}^d$ найдётся движение ρ, такое что $\rho(P) \supseteq T$, то P называется *универсальной покрышкой.*

С помощью нахождения универсальных покрышек можно получать и конкретные оценки сверху на диаметр частей разбиения в проблеме Борсука.

В двумерном случае имеет место результат [76].

Теорема 49 (Pal, 1920)**.** *Пусть P — правильный шестиугольник в $\mathbb{R}^2$, $T \subset \mathbb{R}^2$ — фигура постоянной ширины. Тогда P подобно описывается вокруг T.*

В трёхмерном случае есть аналогичный результат [78].

Теорема 50 (Gale, 1953)**.** *Пусть P — правильный октаэдр с расстоянием между противоположными гранями 1, T — тело постоянной ширины 1 в $\mathbb{R}^3$. Тогда P конгруэнтно описывается вокруг T.*

В работе Макеева [75] исследовался вопрос о нахождении универсальных покрышек и была сформулирована следующая гипотеза, обобщающая результат Пала.

Гипотеза 7 (Макеев, 1995)**.** *Пусть D — многогранник, двойственный в $\mathbb{R}^d$ к разностному множеству правильного симплекса, $T \subset \mathbb{R}^d$ — тело постоянной ширины. Тогда D подобно описывается вокруг T.*

В работе Макеева [79] (и независимо в работе Kuperberg [80]) эта гипотеза было доказана для $d = 3$, а также доказано следующее утверждение.

Теорема 51 (Макеев, 1997)**.** *Пусть D — многогранник, двойственный в $\mathbb{R}^3$ к разностному множеству правильного симплекса, T — строго выпуклое тело. Тогда D аффинно описывается вокруг T.*

Доказательство гипотезы 7 для $d = 3$ позволило доказать следующее усиление гипотезы Борсука в трёхмерном случае: всякое множество диаметра 1 в $\mathbb{R}^3$ можно разбить на 4 части диаметра не более 0.98. Это является наилучшим результатом для $\mathbb{R}^3$ на текущий момент.

Доказательство теоремы 51 фактически основано на вычислении класса Эйлера. Что касается больших размерностей, в работе [80] было показано, что для $d \geq 4$ класс Эйлера в гипотезе 7 нулевой. Это значит, что простого топологического доказательства гипотезы 7 для $d \geq 4$ нет.

В работе автора [81] теорема Макеева о вписывании октаэдра обобщается следующим образом.

Определение 37. Пусть $(e_1, \dots, e_d)$ — некоторый базис в $\mathbb{R}^d$. *Кроссполитопом* в $\mathbb{R}^d$ назовем выпуклую оболочку точек

$$e_1, -e_1, e_2, -e_2, \dots, e_d, -e_d$$

и все ее образы при движениях. Если базис ортогональный и длины всех векторов базиса равны, то будем говорить, что кроссполитоп *правильный*.

Теорема 52 (Карасёв, 2008)**.** *Предположим, что $H \subset \mathbb{R}^d$ — образ гладкого вложения S^{d-1}, $d = p^k$ — степень простого, C — правильный кроссполитоп в $\mathbb{R}^d$. Тогда C подобно вписывается в H.*

В работе [81] доказывается вариант этого утверждения, когда кроссполитоп C не правильный, но имеет $(Z_p)^k$-симметрию, кроме того, там же рассматривались некоторые ослабления условия гладкости (в случае поверхности выпуклого тела) в этой теореме.

Доказательство теоремы сводится к вычислению относительного класса Эйлера в эквивариантных когомологиях. Показывается, что этот класс Эйлера является прямым произведением класса Эйлера теоремы Брауэра и класса Эйлера из доказательства Воловиковым гипотезы Кнастера для $(Z_p)^k$-действия.

Множество более специальных теорем о вписывании и описывании можно найти в диссертации Макеева [74], в которой также детально изучаются вопросы предельного перехода от «хороших» тел к произвольным и вырождения вписанных/описанных многогранников.

4.7. **Бильярды в выпуклых телах.**

Определение 38. *Периодическая бильярдная траектория* в гладком выпуклом теле $T \in \mathbb{R}^d$ — это замкнутая ломаная $P \subset T$, все вершины которой находятся на границе T и в каждой вершине направление ломаной меняется по закону упругого отражения.

Определение 39. Пусть P — периодическая бильярдная траектория. Количество вершин P обозначим $n(P)$.

Ясно, что периодические траектории однозначно соответствуют наборам вершин $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, индексы можно рассматривать по модулю n. В наборе вершин надо запретить совпадения $x_i = x_{i+1}$.

Рассматривается следующая задача: найти оценки снизу на количество различных бильярдных траекторий P с данным $n(P)$ в d-мерном гладком выпуклом теле T. Под «разными траекториями» подразумеваются орбиты группы диэдра D_n, которая естественно действует на вершинах траекторий.

Первые оценки снизу найдены в работе [82] в случае $d = 2$.

Теорема 53 (Birkhoff, 1927)**.** *В двумерной гладкой выпуклой фигуре найдётся не менее $\varphi(n)$ разных бильярдных траекторий с $n(P) = n$.*

Здесь $\varphi(n)$ — функция Эйлера.

В случае $n(P) = 2$ и произвольной размерности d в работе Kuiper [83] найдена оценка снизу, равная d. Как показывает пример эллипсоида с разными осями, эта оценка точна.

Случай $d = 3$ был рассмотрен в работе Бабенко [84], но позже в ней была обнаружена ошибка, на что указано в работах Фарбера и Табачникова [85, 86].

В работах Фарбера и Табачникова [85, 86] были найдены оценки снизу для разных случаев.

Теорема 54 (Фарбер, Табачников, 1999–2000)**.** *Пусть $T \subset \mathbb{R}^d$ — гладкое выпуклое тело, $d \geq 4$, а n — нечётное число. Тогда в T найдётся не менее*

$$\lfloor \log_2(n-1) \rfloor + d - 1$$

разных бильярдных траекторий P с $n(P) = n$.

Если n простое, а d чётное, то разных траекторий не менее n. Если n простое, а d нечётное, то разных траекторий не менее $\dfrac{n+1}{2}$.

В работе автора [35] для простых n оценки усилены.

Теорема 55 (Карасёв, 2008)**.** *Пусть $T \subset \mathbb{R}^d$ — гладкое выпуклое тело, $d \geq 3$, а n — простое число. Тогда в T найдётся не менее $(d-2)(n-1) + 2$ разных бильярдных траекторий P с $n(P) = n$.*

Доказательство этой теоремы, как и результаты [85, 86], основано на сведении задачи к нахождению критических точек функции длины ломаной, далее делается оценка категории Люстерника-Шнирельмана через строение когомологий. При этом в отличие от предыдущих работ, находится Z_p-индекс ($p = n$) конфигурационного пространства и делается оценка эквивариантной категории Люстерника-Шнирельмана через индекс по теореме 26.

4.8. **Деление мер на равные части и части заданной меры.** В этом разделе будут рассматриваться задачи деления абсолютно непрерывных вероятностных мер в $\mathbb{R}^d$ на равные части или части заданной меры при помощи разбиений $\mathbb{R}^d$ специального вида.

В разделе 2.4 уже формулировалась теорема о бутерброде, в работе Грюнбаума [87] была поставлена задача о разрезании одной меры на равные части несколькими гиперплоскостями, которая в более общем виде сформулирована в работе Ramos [88].

Задача 1 (Грюнбаум, Ramos, 1960–1996)**.** *Найти минимальное d, обладающее следующим свойством: для всякого набора из j абсолютно непрерывных вероятностных мер в $\mathbb{R}^d$ найдутся k гиперплоскостей, разбивающих каждую из этих мер на 2^k равных частей. Минимальное такое d обозначим $\Delta(j, k)$.*

Теорема о бутерброде тогда может быть переформулирована так: $\Delta(d, 1) = d$. В случае деления одной меры предполагалось, что $\Delta(1, d) = d$, это утверждение было доказано для $d = 3$ в работе Хадвигера [89], однако в работе Avis [90] было показано, что при $d \geq 5$ $\Delta(1, d) > d$. Гипотеза $\Delta(1, 4) = 4$ пока остаётся открытой. Автором была предпринята попытка (не опубликовано) доказать эту гипотезу вычислением соответствующего эквивариантного относительного класса Эйлера. К сожалению, класс Эйлера оказался нулевым.

Оценка снизу получена рассмотрением меры, сосредоточенной на *кривой моментов*, то есть параметрически заданной кривой

$$(t, t^2, \dots, t^d) \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}.$$

Пересечения гиперплоскостей с кривой моментов — это произвольные наборы из $d+1$ точки на этой кривой и только они. Из этих соображений в работе Ramos [88] была установлена оценка снизу $\Delta(j, k) \geq j\frac{2^k-1}{k}$.

Также в работе [88] была сформулирована тривиальная оценка сверху $\Delta(j, k) \leq j2^{k-1}$ и, с помощью топологических методов, доказаны некоторые нетривиальные оценки сверху, общие формулировки которых мы не приводим, так как они громоздки и требуют дополнительных определений и обозначений.

В работе [91] с помощью более тонкой техники доказываются новые оценки сверху на числа $\Delta(j, k)$. Общие формулировки результата также достаточно громоздки и требуют введения нескольких дополнительных обозначений, приведём лишь некоторые частные результаты этой работы.

Теорема 56 (Mani-Levitska, Vrećica, Živaljević, 2006)**.**

$$\Delta(2^{m+1} - 1, 2) = 3 \cdot 2^m - 1, \quad \Delta(2^m + r, k) \leq 2^{k+m-1} + r.$$

Результаты были получены с помощью вычисления препятствия как методом тестовых сечений, так и с помощью явных вычислений в $(Z_2)^k$-эквивариантных когомологиях.

Определение 40. Систему из k различных половинок гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$, имеющих общим краем плоскость коразмерности 2, назовём *невырожденным k-пропеллером.* Общепринятое англоязычное обозначение k-fan.

Назовём k-пропеллер *правильным*, если он разбивает $\mathbb{R}^d$ на конгруэнтные части.

Заметим, что при рассмотрении неправильных k-пропеллеров одна из частей разбиения может быть невыпуклой. Также в некоторых задачах на разбиение меры требуется рассматривать вырожденные системы.

Определение 41. Вырожденным k-пропеллером называется система из k параллельных гиперплоскостей.

Следующая теорема является обобщением результата [92].

Теорема 57 (Макеев, 1994)**.** *Если выполняется неравенство* $2d-1 \geq m(p-1)$ *и* $p > 2$ *— простое число, то*

1) Для любого набора из $m+1$ абсолютно непрерывной меры в $\mathbb{R}^d$ найдётся (возможно, неправильный или вырожденный) p-пропеллер, разбивающий каждую меру на равные части.

2) Для любого набора из m абсолютно непрерывных мер в $\mathbb{R}^d$ найдётся правильный p-пропеллер, разбивающий каждую меру на равные части.

Пункт 2 этой теоремы получается из пункта 1, если одну из мер взять равномерно распределённой на сфере радиуса R и устремить R к бесконечности. Макеевым [93] также получен результат о разбиении меры пропеллером на «почти равные» части.

Теорема 58 (Макеев, 1996)**.** *Для всякой абсолютно непрерывной меры μ на $\mathbb{R}^2$ найдётся правильный 5-пропеллер, делящий плоскость на части C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, для которых*

$$\mu(C_1) = \mu(C_2) = \mu(C_3) = \mu(C_4) \geq \mu(C_5).$$

Разбиение мер пропеллером фактически представляет собой разбиение ортогональных проекций этих мер на некоторое двумерное пространство. В поиске аналогичных утверждений для проекции на $\mathbb{R}^k$ при $k > 2$ в работе Vrećica и Živaljević [94] была сформулирована следующая гипотеза.

Определение 42. Пусть симплекс $S \in \mathbb{R}^k$ содержит внутри себя начало координат. Тогда набор из конических оболочек его гиперграней $C_1, \dots, C_{k+1}$ называется *простым коническим разбиением.* Если симплекс S правильный и начало координат совпадает с его центром, то простое коническое разбиение называется *правильным.* Сдвиг простого конического разбиения на вектор c будем называть *простым коническим разбиением с центром c.* Соответствующий термин из работы [95] — «(regular) radial dissection».

Гипотеза 8 (Vrećica, Živaljević, 1992)**.** *Пусть в $\mathbb{R}^d$ даны $k+1$ абсолютно непрерывная вероятностная мера $\mu_1, \dots, m_{k+1}$. Тогда для некоторой ортогональной проекции $\pi : \mathbb{R}^d \to L$ на $d-k$-мерное подпространство существует простое коническое разбиение L на части $C_1, \dots, C_{d-k+1}$ с некоторым центром $c \in L$, такое что для всех $i \in [k+1]$, $j \in [d-k+1]$*

$$\mu_i(\pi^{-1}(C_j)) = \frac{1}{d-k+1}.$$

В частном случае $k = 1$ этот результат следует из теоремы 64 (см. далее), в случае $k = d-2$ он следует из теоремы 57, в случае $k = d-1$ — это просто теорема о бутерброде.

В работе Alon [96] (см. также работу Vućić, Živaljević [97]) был доказан следующий результат о делении нескольких мер на отрезке на равные части.

Теорема 59 (Alon, 1987)**.** *Пусть на отрезке I заданы абсолютно непрерывные меры $\mu_1, \dots, mu_n$. Для целого числа $r \geq 2$ положим $N = (n+1)(r-1)$. Тогда I можно разбить на $N+1$ отрезок $I_1, \dots, I_{N+1}$, семейство $\mathcal{F} = \{I_i\}_{i\in[N+1]}$ можно разбить на r подсемейств $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$ так, что для любых $i \in [n]$, $j \in [r]$*

$$\mu_i(\bigcup \mathcal{F}_j) = \frac{1}{r}.$$

Доказательство этой теоремы использует то же препятствие, что и доказательство топологической теоремы Тверберга. Но в этой теореме число r не обязано быть простым, так как из случаев для $r = r_1$ и $r = r_2$ непосредственно выводится случай $r = r_1 r_2$.

В работе de Longueville, Živaljević [98] это утверждение обобщено на случай разбиения нескольких мер на d-мерном кубе следующим образом.

Теорема 60 (de Longueville, Živaljević, 2008)**.** *Пусть n, d, k — натуральные числа и $k \geq 2$. Предположим, что на кубе I^d заданы абсолютно непрерывные вероятностные меры $\mu_1, \dots, \mu_n$. Рассмотрим набор натуральных чисел $m_1, \dots, m_d$ такой, что $m_1 + m_2 + \dots + m_d = n(k-1)$.*

Тогда найдётся набор $\mathcal{H}$ из $n(k-1)$ гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$, со следующими свойствами. Для любого $i \in [d]$ ровно m_i гиперплоскостей из $\mathcal{H}$ перпендикулярны i-й оси координат, семейство $\mathcal{H}$ даёт разбиение I^d на семейство параллелепипедов $\mathcal{P}$. Семейство $\mathcal{P}$ можно разбить на k подсемейств $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ так, что для любых $i \in [n], j \in [k]$

$$\mu_i(\bigcup \mathcal{P}_j) = \frac{1}{k}.$$

Следующее утверждение о разбиении меры конусами на равные части при $d = 3$ было доказано Макеевым [99], приведённая здесь формулировка получена автором.

Теорема 61 (Макеев, Карасёв, 1988–2008)**.** *Пусть $G = (Z_p)^k$, $d = p^k$, p — простое число. Предположим, что G действует на $\mathbb{R}^d$ ортогонально транзитивными перестановками векторов некоторого базиса. Пусть замкнутый конус C с центром в начале координат таков, что семейство $\{\pm g(C)\}_{g \in G}$ даёт разбиение $\mathbb{R}^d$, а его подсемейство $\{g(C)\}_{g \in G}$ имеет единственный общий луч.*

Тогда для любой абсолютно непрерывной вероятностной меры μ на $\mathbb{R}^d$ найдётся такое не меняющее ориентацию движение ρ, что для любого $g \in G$

$$\mu(\rho(g(C))) = \mu(\rho(-g(C)) = \frac{1}{2d}.$$

В доказательстве этой теоремы используется тот же класс Эйлера, что и в доказательстве теоремы 52.

Рассмотрим теперь вопрос о разрезании мер на части заданной величины. Начнём с задачи о разбиении одной гиперплоскостью.

Задача 2. *Для заданных абсолютно непрерывных мер $\mu_1, \dots, \mu_d$ в $\mathbb{R}^d$ и чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in [0,1]^d$ найти полупространство $H \subset \mathbb{R}^d$ такое, что для всех $i \in [d]$*

$$\mu_i(H) = \alpha_i.$$

При $\alpha_i = 1/2$ эта задача решается положительно с помощью теоремы о бутерброде. В работе Bárány, Hubard, Jerónimo [100] изучалась эта задача и её обобщение, в котором рассматривается $d + 1$ мера и вместо полупространства требовалось найти шар с тем же свойством. По сути, задача для шара сводится к приведённой выше с помощью отображения $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d+1}$, действующего по формуле $(x_1, \dots, x_d) \mapsto (x_1, \dots, x_d, x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2)$.

Рассмотрение мер, равномерно распределённых на концентрических шарах показывает, что в общем случае (без ограничений на меры) задача 2 может иметь решение только при $\alpha_i = 1/2$. Что касается ограничений на меры, то в работе [100] установлен следующий частный случай, в котором задача 2 допускает положительное решение.

Определение 43. Связные множества $C_1, C_2, \dots, C_k$ в $\mathbb{R}^d$ *вполне отделимы*, если любой набор представителей $x_i \in C_i$ является аффинно независимым. Очевидно, что при этом $k \leq d + 1$.

Теорема 62 (Bárány, Hubard, Jerónimo, 2008). *Если выпуклые оболочки носителей мер μ_i вполне отделимы, то задача 2 решается при любых $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in [0, 1]^d$.*

Аналогичное утверждение верно и для $d + 1$-й меры и отрезания части мер шаром (см. [100]). В работе автора [101] условие на вполне отделимость было ослаблено следующим образом.

Определение 44. Пару из непрерывной вероятностной меры с компактным носителем μ и числа $\varepsilon \in [0, 1/2)$ будем называть *мерой с допуском*. Для краткости при рассмотрении нескольких мер μ_i допуск каждой будем обозначать $\varepsilon(\mu_i)$.

Определение 45. Пусть в $\mathbb{R}^d$ дана мера с допуском μ. Будем говорить, что гиперплоскость h *пересекает (с допуском)* меру μ, если h делит $\mathbb{R}^d$ на два полупространства H_1 и H_2 и

$$\mu(H_1), \mu(H_2) \geq \varepsilon(\mu).$$

Гиперплоскости в $\mathbb{R}^d$ параметризуются пространством канонического расслоения γ_d^1 над грассманианом $G_d^1 = \mathbb{R}P^{d-1}$ (см. раздел 5.2).

Определение 46. Рассмотрим семейство из d мер с допуском $\{\mu_i\}_{i=1}^d$ в $\mathbb{R}^d$. Обозначим за $X \subseteq \gamma_d^1$ множество гиперплоскостей, пересекающих с допуском все эти меры и рассмотрим естественную проекцию $p : X \to G_d^1$. Будем говорить, что семейство мер с допуском $\{\mu_i\}_{i=1}^d$ *плоское*, если отображение p пропускается через отображение универсального накрытия $\pi : S^{d-1} \to G_d^1$, то есть $p = \pi \circ \tilde{p}$.

Теорема 63 (Карасёв, 2008). *Рассмотрим плоское семейство мер с допуском $\{\mu_i\}_{i=1}^d$ в $\mathbb{R}^d$ и числа $\{\alpha_i\}$ такие, что либо $\alpha_i = \varepsilon(\mu_i)$, либо $\alpha_i = 1 - \varepsilon(\mu_i)$. В таком случае существует полупространство $H \subset \mathbb{R}^d$ такое, что для всех $i \in [d]$*

$$\mu_i(H) = \alpha_i.$$

Для простых конических разбиений Vrećica и Živaljević [95] получили следующий результат о разбиении на части заданной величины.

Теорема 64 (Vrećica, Živaljević, 2001). *Пусть $C_1, \dots, C_{d+1}$ — простое коническое разбиение $\mathbb{R}^d$. Тогда для всякой абсолютно непрерывной вероятностной меры μ на $\mathbb{R}^d$ и* *набора положительных вещественных чисел* $\{\alpha_i\}_{i\in[d+1]}$ *с единичной суммой найдётся такой вектор* $c \in \mathbb{R}^d$*, что для любого* $i \in [d+1]$

$$\mu(C_i + c) = \alpha_i.$$

В работе автора [102] был доказан аналог этого результата для деления меры на количество частей, большее $d+1$.

Теорема 65 (Карасёв, 2005)**.** *Пусть* P *— многогранник в* $\mathbb{R}^d$*, а* $\{F_i\}_{i\in[m]}$ *— набор его гиперграней. Предположим, абсолютно непрерывная вероятностная мера* μ *сосредоточена на* P*.*

Тогда для любого набора положительных чисел $\{\alpha_i\}_{i\in[m]}$ *с единичной суммой найдётся разбиение* P *на выпуклые множества* $\{A_i\}_{i\in[m]}$*, для которого при любом* $i \in [m]$

$$A_i \cap \operatorname{bd} P = F_i \quad \mu(A_i) = \alpha_i.$$

Alon [96] сформулировал следующую гипотезу.

Гипотеза 9 (Alon, 1987)**.** *Для каждого натурального* n *и вещественного* $\alpha \in (0,1)$ *существует натуральное число* $N(\alpha, n)$*, обладающее следующим свойством.*

Если на отрезке I *заданы абсолютно непрерывные меры* $\mu_1, \dots, \mu_n$*, то найдётся подмножество* $X \subseteq I$*, являющееся объединением не более чем* $N(\alpha, n)$ *отрезков, для которого при любом* $i \in [n]$

$$\mu_i(X) = \alpha.$$

Для рациональных α эта гипотеза следует из многократного применения теоремы 59, для иррациональных α она остаётся открытой.

4.9. **Топологический подход к теоремам типа Хелли.** Следуя обзору Eckhoff [103], приведём основные понятия топологического подхода к теоремам типа Хелли.

Определение 47. Для семейства $\mathcal{F}$ подмножеств $\mathbb{R}^d$ *нервом* семейства $\mathcal{F}$ назовём симплициальный комплекс $N(\mathcal{F})$ на вершинах $\mathcal{F}$, симплексами которого являются наборы $\sigma \subseteq \mathcal{F}$, имеющие непустое пересечение.

Для упрощения рассуждений далее будем рассматривать только конечные семейства подмножеств и конечные симплициальные комплексы. Основной результат о связи нерва с семейством множеств выглядит следующим образом [104].

Теорема 66 (Лере, 1945)**.** *Предположим, что все множества семейства* $\mathcal{F}$ *открытые или все замкнутые. Также предположим, что для всякого подсемейства* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *пересечение* $\bigcap \mathcal{G}$ *либо пусто, либо гомотопически тривиально. Тогда* $\bigcup \mathcal{G}$ *слабо гомотопически эквивалентно нерву* $N(\mathcal{F})$*.*

Определение 48. Семейства, для которых верна теорема Лере, назовём *правильными.*

Ясно, что семейства замкнутых выпуклых множеств удовлетворяют условиям теоремы Лере. В связи с этим возникает вопрос [105].

Задача 3 (Wegner, 1975). *Как охарактеризовать те симплициальные комплексы, которые являются нервами семейств замкнутых выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$?*

Назовём такие комплексы d-реализуемыми. Из теоремы Лере легко выводится следствие.

Теорема 67. *Если комплекс K является d-реализуемым, то для любого множества его вершин W индуцированный подкомплекс $K[W]$ имеет гомологическую размерность не более $d-1$, иначе говоря $\tilde{H}^i(K[W], \mathbb{Z}) = 0$ при $i \geq d$.*

В связи с этой теоремой уместно сделать определение.

Определение 49. Рассмотрим симплициальный комплекс K и число $d \geq 1$. Если для любого множества его вершин W индуцированный подкомплекс $K[W]$ имеет гомологическую размерность не более $d-1$, то комплекс K назовём *d-мерным по Лере* комплексом. Общепринятое англоязычное обозначение «d-Leray complex».

В работе Wegner [106] был приведен пример 2-мерного по Лере комплекса, который не является 2-реализуемым. В связи с этим имеет смысл искать более точные характеризации d-реализуемых комплексов.

Определение 50. *Элементарным d-складыванием* комплекса назовём удаление некоторого симплекса σ, размерности не более $d-1$, который содержится в единственном максимальном симплексе, вместе с σ удаляются все содержащие его симплексы. Комплекс называется *d-складным*, если последовательностью элементарных d-складываний можно превратить комплекс в пустой. Общепринятые англоязычные термины «d-collapse» и «d-collapsible».

Теорема 68 (Wegner [105], 1975). *Всякий d-реализуемый комплекс d-складной.*

Свойство d-складности влечёт справедливость теоремы Хелли, цветной теоремы Хелли, дробной теоремы Хелли (см. ниже), теоремы Хадвигера-Дебруннера (см. ниже) и т.п. Приведём доказательство теоремы 68.

Доказательство теоремы 68. Без ограничения общности можно считать, что выпуклые множества в семействе $\mathcal{F}$ являются строго выпуклыми компактами, причём их границы являются гладкими поверхностями, находящимися в общем положении в $\mathbb{R}^d$. В частности это означает, что никакие $d+1$ границы не пересекаются в одной точке. Если в семействе не более d элементов, то нерв d-складной по определению.

Рассмотрим теперь какую-то линейную функцию $l : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ и положим

$$l_0 = \max_{\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}, \bigcap\mathcal{G}\neq\emptyset} \min_{x\in\bigcap\mathcal{G}} l(x).$$

Пусть значение l_0 достигается для некоторого $\mathcal{G}$ в точке x_0. Из общего положения ясно, что x_0 лежит на границах не более d множеств, тогда можно перейти к подсемейству и считать, что $|\mathcal{G}| \leq d$ и $\forall C \in \mathcal{G}\ x_0 \in \partial C$.

Подсемейство $\mathcal{G}$ с точкой x_0 при заданном уровне l_0 вообще может выбираться неоднозначно. Но границы множеств $\mathcal{F}$ находятся в общем положении, поэтому можно изначально выбрать такую функцию l, что подсемейство $\mathcal{G}$ будет выбираться однозначно.

Легко видеть, что если для некоторого $C \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$ пересечение $C \cap \bigcap \mathcal{G}$ не пусто, то $C \ni x_0$. Следовательно грань $\mathcal{G}$ нерва $N(\mathcal{F})$ содержит единственную максимальную грань, соответствующую тем множествам, которые содержат x_0.

Легко видеть, что если взять достаточно малое ε и рассмотреть полупространство $H = \{x \in \mathbb{R}^d : l(x) \le l_0 - \varepsilon\}$, то замена семейства $\mathcal{F}$ на семейство

$$\mathcal{F}' = \{F \cap H : F \in \mathcal{F}\}$$

приводит именно к складыванию симплекса $\mathcal{G}$. Далее процесс повторяется. □

Известно, что уже при $d = 2$ можно привести пример d-мерного по Лере комплекса, который не является d-складным. Также в обзоре [103] вводится понятие *строгой d-складности*, которое также следует из d-реализуемости.

Приведём некоторые теоремы типа Хелли для семейств выпуклых множеств.

Теорема 69 (Дробная теорема Хелли, Katchalski, Liu [107], 1979)**.** *Для всякого $\beta > 0$ найдётся такое $\alpha > 0$, что если в конечном семействе выпуклых компактов $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^d$ с $|\mathcal{F}| = n$ найдётся не менее $\beta\binom{n}{d+1}$ подсемейств из $d+1$ множества с общей точкой, то найдётся подсемейство $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ такое, что*

$$|\mathcal{G}| \ge \alpha n, \quad \bigcap \mathcal{G} \ne \emptyset.$$

В работе [107] также приведены явные формулы для зависимости $\alpha(\beta, d)$.

Определение 51. Будем говорить, что семейство множеств $\mathcal{F}$ имеет точечную n-трансверсаль, если существует n элементное множество T, пересекающее все множества семейства $\mathcal{F}$. Минимальный размер трансверсали $\mathcal{F}$ обозначается $\tau(\mathcal{F})$, его англоязычное название «piercing number».

Определение 52. Будем говорить, что для семейства множеств $\mathcal{F}$ выполняется (p, q)-свойство, если $|\mathcal{F}| \ge p$ и в любом подсемействе $\mathcal{G}$ из p элементов найдётся подсемейство $\mathcal{H}$ из q элементов, для которого $\bigcap \mathcal{H} \ne \emptyset$.

Теорема 70 (Хадвигер, Дебруннер [108], 1957)**.** *Предположим, что $p \ge q \ge d+1$ и $p(d-1) < (q-1)d$. Тогда для всякого семейства выпуклых множеств $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^d$ из (p, q)-свойства следует $\tau(\mathcal{F}) \le p - q + 1$.*

Теорема 71 (Alon, Kleitman [109], 1992)**.** *Предположим, что $p \ge q \ge d+1$. Тогда найдётся такое число $t(p, q, d)$, что для всякого семейства выпуклых множеств $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^d$ из (p, q)-свойства следует $\tau(\mathcal{F}) \le c(p, q, d)$.*

Очевидно, что в теореме Хелли достаточно выполнения свойства d-мерности по Лере для нерва семейства множеств. Поэтому возникает естественный вопрос: насколько в теоремах типа Хелли требуется d-реализуемость нерва, d-складность нерва или достаточно d-мерности по Лере. Приведём некоторые результаты в этом направлении.

В работе Alon, Kalai, Matoušek, Meshulam [110] показано, что для выполнения дробной теоремы Хелли и теоремы 71 достаточно выполнения свойства d-мерности по Лере для нерва семейства множеств. В работе Kalai, Meshulam [111] показано, что для выполнения цветной теоремы Хелли достаточно того же свойства. То есть фактически указанные теоремы выполняются для любого правильного семейства множеств в $\mathbb{R}^d$.

4.10. **Аналоги теоремы Кнастера-Куратовского-Мазуркевича.** Сформулируем обобщение теоремы ККМ о покрытиях симплекса, которое можно рассматривать как цветной вариант теоремы ККМ, аналогично цветному варианту теоремы Хелли. Частный случай ($m = n$, $a(x) \equiv 1$) доказан в работе [112], приведённая здесь формулировка доказана автором в [113].

Теорема 72 (Bapat, Карасёв, 1989–2006)**.** *Рассмотрим множество X из n точек в $\mathbb{R}^d$ и множество индексов $[m]$, где $m \geq n$. Пусть $A(x,j)$, где $x \in X$, $j \in [m]$ — семейство замкнутых множеств в $\mathbb{R}^d$, для которого*

$$\forall j \in [m]\ \forall Y \subseteq X\ \operatorname{conv} Y \subseteq \bigcup_{x \in Y} A(x,j).$$

Пусть каждому $x \in X$ сопоставлено натуральное число $a(x)$ так, что $\sum_{x\in X} a(x) = m$. Тогда найдётся такое отображение множества индексов $\sigma : [m] \to X$, что

$$\forall x \in X\ |\sigma^{-1}(x)| = a(x) \quad \text{и} \quad \bigcap_{j=1}^{m} A(\sigma(j), j) \neq \emptyset.$$

Обобщением этой теоремы является аналог теоремы ККМ для произведения симплексов, доказанный в [114] (см. также [115]) для случая $m = n$, $a_i \equiv 1$, приводимый здесь в более общей формулировке, полученной автором.

Теорема 73 (Tardos, Карасёв, 1995–2008)**.** *Предположим, что произведение симплексов $\Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}$ $(m \geq n)$ покрыто семейством из mn замкнутых множеств A_{ij} $(i \in [n], j \in [m])$, причём каждое A_{ij} не пересекает $\partial_i \Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}$ и не пересекает $\Delta^{n-1} \times \partial_j \Delta^{m-1}$. Возьмём натуральные числа $a_1, \dots a_n$, сумма которых равна m.*

Тогда найдётся отображение $\sigma : [m] \to [n]$, для которого

$$\forall i \in [n]\ |\sigma^{-1}(i)| = a_i, \quad \bigcap_{j=1}^{m} A_{\sigma(j)j} \neq \emptyset.$$

Приведём доказательство этой теоремы. Сначала сформулируем лемму, которая легко доказывается индукцией по остовам комплекса.

Лемма 5. *Пусть непрерывное отображение $f : \Delta^d \to \Delta^d$ отображает каждую грань Δ^d в себя. Тогда отображение $f^* : H^d(\Delta^d, \partial\Delta^d) \to H^d(\Delta^d, \partial\Delta^d)$ тождественно и само отображение f сюръективно.*

Доказательство теоремы 73. Сначала от множеств A_{ij} перейдём к функциям $\chi_{ij} : \Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1} \to \mathbb{R}$, которые равны 1 на A_{ij} и обращаются в нуль в некоторой ε-окрестности A_{ij}.

Так как множества A_{ij} покрывают $\Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}$, то можно перейти к нормированным функциям

$$\phi_{ij}(x) = \frac{\chi_{ij}(x)}{\sum_{k,l} \chi_{kl}(x)}.$$

Далее рассмотрим функции

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{m} \phi_{ij}(x) \quad g_j(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_{ij}(x).$$

Оба набора дают отображения $f : \Delta^{n-1} \to \Delta^{n-1}$ (при фиксированном вложении $\Delta^{n-1} \times \{y\} \to \Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}$) и $g : \Delta^{m-1} \to \Delta^{m-1}$ (при фиксированном вложении $\{x\} \times \Delta^{m-1} \to \Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}$), при достаточно малом ε удовлетворяющие условиям леммы 5. Тогда по лемме 5 отображения

$$f^* : H^*(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \to H^*(\Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}, \partial\Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1})$$

и

$$g^* : H^*(\Delta^{m-1}, \partial\Delta^{m-1}) \to H^*(\Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}, \Delta^{n-1} \times \partial\Delta^{m-1})$$

тождественны. По свойству $\times$-произведения когомологий отображение $(f \times g)^*$ тождественно на $H^{n+m-2}(\Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}, \partial(\Delta^{n-1} \times \Delta^{m-1}))$.

Значит $f \times g$ сюръективно и найдётся точка x, для которой

$$\forall i \in [n] \ f_i(x) = \frac{a_i}{m} \quad \forall j \in [m] \ g_j(x) = \frac{1}{m}.$$

Возвращаясь к матрице $\phi_{ij}(x)$ видим, что у неё суммы по строкам равны a_i/m, а по столбцам $1/m$. Значит по лемме Холла о паросочетаниях найдётся отображение $\sigma : [m] \to [n]$, для которого

$$\forall i \in [n] \ |\sigma^{-1}(i)| = a_i, \quad \forall j \in [m] \ \phi_{\sigma(j)j}(x) \neq 0.$$

Далее утверждение теоремы получается переходом к пределу $\varepsilon \to 0$. □

5. Плоские трансверсали и топология многообразий Грассмана

5.1. **Теоремы типа Хелли для плоских трансверсалей.** В комбинаторной геометрии теоремами типа Хелли называются утверждения, в которых для проверки некоторого свойства семейства множеств нужно проверить это (или иное) свойство в каждом подсемействе ограниченного сверху некоторой константой размера. В самой теореме Хелли свойство иметь общую точку нужно проверить для всех подсемейств размера не более $d+1$.

Определение 53. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств $\mathbb{R}^d$. k-плоскость L называется *плоской k-трансверсалью* семейства $\mathcal{F}$, если для любого $C \in \mathcal{F}$ пересечение $C \cap L \neq \emptyset$. Англоязычный термин «common transversal».

Далее плоские трансверсали будем называть просто трансверсалями, если это не вызывает недоразумений. Уже в случае $k = 1$ (линейные трансверсали) на плоскости не существует аналога теоремы Хелли для проверки существования трансверсали.

Пример 1. Впишем в круг радиуса 1 правильный $2n$-угольник в вершинами $\{p_i\}_{i\in[2n]}$. Рассмотрим семейство равных кругов B_i с радиусами $\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{n}}{2}$ с центрами в точках p_i. Легко проверить, что любые $2n-1$ круга семейства можно пересечь прямой, но все пересечь нельзя. Таким образом, для наличия линейной трансверсали на плоскости константы Хелли не существует.

Тем не менее, на плоскости есть некоторые положительные результаты в этом направлении.

Теорема 74 (Хадвигер [116], 1957)**.** *Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ из не менее чем трёх попарно непересекающихся выпуклых компактов в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что $\mathcal{F}$ можно линейно упорядочить так, что всякие три множества можно пересечь прямой в порядке, совпадающим с введённым порядком на $\mathcal{F}$. Тогда $\mathcal{F}$ имеет линейную трансверсаль.*

Теорема 75 (Katchalski, Lewis [117], 1980)**.** *Существует такая константа k, что выполняется следующее условие. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство попарно непересекающихся транслятов одного и того же выпуклого компакта $C \in \mathbb{R}^2$, в котором каждые три и менее множеств имеют линейную трансверсаль. Тогда из $\mathcal{F}$ можно выбросить не более k множеств так, что оставшиеся будут иметь линейную трансверсаль.*

Теорема 76 (Тверберг [118], 1989)**.** *Семейство $\mathcal{F}$ из не менее 5 попарно непересекающихся транслятов одного и того же выпуклого компакта $C \in \mathbb{R}^2$ имеет линейную трансверсаль, если линейную трансверсаль имеет каждое подсемейство $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, для которого $|\mathcal{G}| = 5$.*

Также сделаны некоторые результаты для линейных трансверсалей семейств равных шаров в $\mathbb{R}^d$. Один из них приведён ниже.

Теорема 77 (Holmsen, Katchalski, Lewis, Cheong, Goaoc, Petitjean [119, 120], 2003–2008)**.** *Семейство $\mathcal{F}$ из не менее $4d-1$ попарно непересекающихся единичных шаров в $\mathbb{R}^d$*

имеет линейную трансверсаль, если линейную трансверсаль имеет каждое подсемейство $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, для которого $|\mathcal{G}| = 4d - 1$.

В работе Holmsen, Matoušek [121] показано, что не существует теоремы типа Хелли для существования линейной трансверсали семейства попарно непересекающихся транслятов одного и того же компакта в $\mathbb{R}^3$, что опровергает гипотезу из работы Aronov, Goodman, Pollack, Wenger [122]. Для трансверсалей большей размерности ситуация ещё сложнее. Во-первых ясно, что для существования теоремы типа Хелли для k-плоскостей надо потребовать выполнения некоторого свойства, аналогичного отсутствию попарных пересечений в случае линейных трансверсалей.

Определение 54. Семейство выпуклых компактов в $\mathbb{R}^d$ назовём *k-отделимым*, если любое его подсемейство из не более чем $k+2$ множеств вполне отделимо (см. определение 43).

В соответствии с этим определением 0-отделимость — это отсутствие попарных пересечений. Нетрудно заметить, что для установления теоремы типа Хелли для k-трансверсалей необходимо требовать $k-1$-отделимость. В работе Goodman, Pollack [123] доказано следующее обобщение теоремы Хадвигера о линейной трансверсали.

Теорема 78 (Goodman, Pollack, 1988)**.** *Предположим, что для $d-2$-отделимого семейства выпуклых компактов $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^d$ найдётся ориентированный матроид ранга d на множестве $\mathcal{F}$, для которого выполняется следующее свойство. Любое подсемейство $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ из $d+1$ множеств имеет гиперплоскую трансверсаль h, и пересечения $\{C \cap h\}_{C\in\mathcal{G}}$ расположены в h согласованно с матроидом. Тогда $\mathcal{F}$ имеет гиперплоскую трансверсаль.*

В работе [122] с помощью предыдущей теоремы был установлен следующий результат.

Теорема 79 (Aronov, Goodman, Pollack, Wenger, 2000)**.** *Для любого d и $\varepsilon > 0$ существует число $N(d, \varepsilon)$, обладающее следующим свойством. Предположим, семейство $\mathcal{F}$ из не менее $N(d, \varepsilon)$ выпуклых компактов диаметра ≤ 1 в $\mathbb{R}^d$ таково, что семейство ε-окрестностей множеств из $\mathcal{F}$ является $d-2$-отделимым. Тогда для наличия гиперплоской трансверсали $\mathcal{F}$ достаточно проверить наличие гиперплоской трансверсали всех подсемейств $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ размера не более $2d - 2$.*

Там же была сформулирована гипотеза, что просто 1-отделимость достаточна для существования теоремы типа Хелли для 2-трансверсалей семейств равных шаров в $\mathbb{R}^3$. Однако, в работе Holmsen [124] был построен контрпример к этой гипотезе.

Приведённые выше результаты показывают, что вопрос о существовании теорем типа Хелли для плоских трансверсалей сам по себе довольно сложен. Часто можно получить результат о k-трансверсалях с помощью ортогональной проекции на дополнительную $d-k$-плоскость. Типичный пример даёт теорема Хорна и Кли [125, 126].

Теорема 80 (Хорн, Кли, 1949–1951)**.** *Для натуральных $1 \leq k \leq d$ и семейства $\mathcal{F}$ выпуклых компактов в $\mathbb{R}^d$, следующие три условия эквивалентны:*

1) Каждые $\le k$ множеств из $\mathcal{F}$ имеют общую точку;

2) Каждая плоскость коразмерности $k-1$ в $\mathbb{R}^d$ имеет транслят, пересекающий все множества $\mathcal{F}$;

3) Каждая плоскость коразмерности k в $\mathbb{R}^d$ принадлежит плоскости коразмерности $k-1$, пересекающей все множества $\mathcal{F}$.

5.2. **Топология канонического расслоения над многообразием Грассмана.** Для применения топологических методов к задачам о плоских трансверсалях нужно подходящим образом параметризовать пространство всех k-плоскостей.

Рассмотрим пространство всех k-плоскостей в $\mathbb{R}^d$. Каждой такой плоскости α можно сопоставить единственное ортогональное ей $d-k$-мерное линейное подпространство $g(\alpha) \subset \mathbb{R}^d$ и единственную точку пересечения $\alpha \cap g(\alpha)$. Таким образом пространство k-мерных аффинных плоскостей отождествляется с пространством γ_d^{d-k} канонического расслоения над вещественным грассманианом G_d^{d-k}. В дальнейшем будем считать пространство плоскостей наделённым топологией γ_d^{d-k}.

Если нам нужно рассмотреть пространство ориентированных k-плоскостей, то оно естественным образом отождествляется с пространством $\gamma_d^{d-1^+}$ канонического расслоения над ориентированным грассманианом $G_d^{d-k^+}$.

Следующая теорема о классе Эйлера канонического расслоения для $p = 2$ доказана в работе Дольникова [127], случай одновременно нечётных p и d доказан в работе Živaljević [128], приведённая здесь формулировка получена автором в [129].

Теорема 81 (Дольников, Živaljević, Карасёв, 1987–2007)**.** *Пусть p — простое число, $\gamma = \gamma_d^{d-k}$ ($\gamma_d^{d-k^+}$ при $p > 2$). Для класса Эйлера $e(\gamma)$ по модулю p выполняется соотношение*

$$e(\gamma)^k \neq 0 \in H^{d(d-k)}(G_d^{d-k}, Z_p) \left(H^{d(d-k)}(G_d^{d-k^+}, Z_p) \text{ при } p > 2\right),$$

если $p = 2$ или $d-k$ чётно.

В векторном расслоении $\gamma_d^{d-k} \to G_d^{d-k}$ действует Z_2 отображением $x \mapsto -x$ в каждом слое. В некоторых приложениях необходимо знать Z_2-индекс пространства сфер $S(\gamma_d^{d-k})$ этого расслоения [101].

Теорема 82 (Карасёв, 2008)**.** $\underline{\mathrm{ind}}_{Z_2} S(\gamma_d^{d-k}) = d-1$.

Рассмотрим теперь ориентированный грассманиан $G_d^{k^+}$. На нем Z_2 действует сменой ориентации. Заметим, что взятие ортогонального дополнения даёт канонический изоморфизм $G_d^{k^+} \sim G_d^{d-k^+}$, перестановочный с операцией замены ориентации. Поэтому для вычисления Z_2-индекса ориентированного грассманиана достаточно рассмотреть случай $2k \le d$. Следующая лемма суммирует сведения об индексе ориентированного грассманиана из работ [130, 131].

Теорема 83 (Hiller, 1980)**.** *Пусть $2k \le d$ и 2^s — минимальная степень двойки $2^s \ge d$.*

1) Если $k = 1$, то $\underline{\mathrm{ind}}\, G_d^{1^+} = \underline{\mathrm{ind}}\, S^{d-1} = d-1$;

2) Если $k = 2$, то $\underline{\mathrm{ind}}\, G_d^{k^+} = 2^s - 2$;

3) Если $k > 2$, то при $d = 2k = 2^s$ $2^{s-1} \leq \underline{\operatorname{ind}} G_d^{k+} \leq 2^s - 1$, в остальных случаях $2^s - 2 \leq \underline{\operatorname{ind}} G_d^{k+} \leq 2^s - 1$.

Во всех случаях $\underline{\operatorname{ind}} G_d^{k+} \geq d - k$ и равенство достигается только при $k = 1$ или $k = 2$ и $d = 2^s$.

Следующее утверждение о грассманиане применяется в статье Громова [132].

Теорема 84 (Громов, 1967)**.** *Рассмотрим вещественный или комплексный грассманиан G_d^k и каноническое векторное расслоение $\gamma_d^k \to G_d^k$. Тогда структурная группа этого расслоения не может быть редуцирована к собственной подгруппе $O(k)$ ($U(k)$ в комплексном случае), если выполняется одно из следующих условий:*

1) $d \geq 2k$ для комплексного грассманиана;

2) k нечётно и $d \geq 3k - 2$ для вещественного грассманиана;

3) k чётно и $d \geq 3k - 4$ для вещественного грассманиана.

Кроме того, структурная группа расслоения не редуцируется к подгруппе, действующей нетранзитивно на $k-1$-мерной сфере ($2k-1$-мерной сфере в комплексном случае) при чётных k.

С помощью этого утверждения в работе [132] доказаны некоторые частные случаи гипотезы Банаха.

Гипотеза 10 (Банах)**.** *Пусть $1 < k < n$. Предположим, что у n-мерного банахова пространства B (вещественного или комплексного) все k-мерные подпространства изоморфны как банаховы пространства. Тогда пространство B евклидово.*

5.3. **Теорема Дольникова и другие теоремы типа Хелли о плоских трансверсалях.** Важным следствием из теоремы 81 является следующая теорема из [127].

Определение 55. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *l-выпуклым*, если его проекция на любое l-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$ выпукла.

Теорема 85 (Дольников, 1987)**.** *Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ семейства $\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_k$ $d-k$-выпуклых компактов. Предположим, что в каждом семействе любые $d-k+1$ или менее множеств имеют общую точку. Тогда семейство $\bigcup_{i=0}^k \mathcal{F}_i$ имеет k-трансверсаль.*

В работе Makai, Vrećica, Živaljević [133] приводится ещё одно следствие теоремы 81.

Определение 56. Назовём k-плоскость L *максимальной k-трансверсалью* выпуклого компакта K, если

$$\operatorname{mes}_k L \cap K = \max_{L' \| L} \operatorname{mes}_k L' \cap K.$$

Здесь mes_k — нормализованная мера на k-мерной плоскости L или L'. Максимальная 1-трансверсаль называется *аффинным диаметром.*

Теорема 86 (Makai, Vrećica, Živaljević, 2001)**.** *Для всякого семейства $K_0, \dots, K_k$ из $k+1$-го выпуклого компакта в $\mathbb{R}^d$ найдётся k-плоскость L, которая одновременно является максимальной трансверсалью для всех K_i.*

В работе [133] приводятся и другие следствие теоремы 81, в частности, характеризующие множество общих максимальных k-трансверсалей для семейства из $l \leq k$ выпуклых компактов.

Ниже приводятся некоторые результаты автора из [101], которые являются теоремами типа Хелли для плоских трансверсалей. Следующая теорема близка к теореме Дольникова и является следствием теоремы типа Борсука-Улама-Люстерника-Шнирельмана для сферы.

Теорема 87 (Карасёв, 2008)**.** *Пусть в $\mathbb{R}^d$ даны $d+1$ семейство 1-выпуклых компактов $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in[d+1]}$. Пусть в каждом семействе любые два компакта пересекаются.*

Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:

1) семейство $\bigcup_{i\in[d+1]} \mathcal{F}_i$ имеет $d-1$-трансверсаль;

2) для всякого разбиения множества индексов $[d+1]$ на два множества I_1 и I_2 найдётся такая гиперплоскость h и набор представителей $C_i \in \mathcal{F}_i$ $(i \in [d+1])$, что множества $\{C_i\}_{i\in I_1}$ лежат с одной стороны от h, а $\{C_i\}_{i\in I_2}$ лежат с другой стороны от неё.

Следующая теорема является следствием теоремы 83.

Теорема 88 (Карасёв, 2008)**.** *Пусть $0 < k < d$ и в $\mathbb{R}^d$ дано $d-k+1$ семейство $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in[d-k+1]}$ выпуклых компактов. Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:*

1) Найдётся система представителей $K_i \in \mathcal{F}_i$, такая что $\bigcap_{i\in[d-k+1]} K_i = \emptyset$;

2) В некотором из семейств $\mathcal{F}_i$ любые $k+1$ или менее множеств имеют $k-1$-трансверсаль.

3) Найдётся семейство параллельных k-плоскостей $\{\alpha_i\}_{i\in[d-k+1]}$, такое что для всех $i \in [d-k+1]$ α_i является k-трансверсалью $\mathcal{F}_i$.

Причём третья альтернатива возможна только если $2k \leq d$, $k = 1$ или $k = 2$ и $d = 2^l$.

В случае, когда количество семейств невелико по сравнению с d, утверждение теоремы 88 можно уточнить.

Теорема 89 (Карасёв, 2008)**.** *Пусть $d = 2k+1 \geq 3$ и в $\mathbb{R}^d$ дано 2 семейства $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ выпуклых компактов. Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:*

1) Найдётся два представителя $K_1 \in \mathcal{F}_1$, $K_2 \in \mathcal{F}_2$, для которых $K_1 \cap K_2 = \emptyset$;

2) В некотором из семейств $\mathcal{F}_i$ любые $k+2$ или менее множеств имеют k-трансверсаль.

Следующая теорема является аналогом теоремы 88, полученным с помощью теоремы 83 об индексе ориентированного грассманиана.

Теорема 90 (Карасёв, 2008)**.** *Пусть $k > 2, 2k < d+2$ и в $\mathbb{R}^d$ дано k семейств $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ выпуклых компактов. Пусть для некоторого $m \leq d-k+1$ выполняется*

$$2^{\lceil \log_2 d \rceil} \geq k 2^{\lceil \log_2 (d-m) \rceil} + 2.$$

Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:

1) Найдётся система представителей $K_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, K_k \in \mathcal{F}_k$, для которых $\bigcap_{i=1}^k K_i = \emptyset$;

2) В некотором из семейств $\mathcal{F}_i$ любые $m+1$ или менее множеств имеют $m-1$-трансверсаль.

5.4. **Теорема об общей неподвижной точке послойных отображений.** Сформулируем обобщение теоремы Брауэра о неподвижной точке из работы автора [69], в котором фигурируют несколько послойных отображений пространства шаров векторного расслоения.

Теорема 91 (Карасёв, 2008)**.** *Пусть дано векторное расслоение $\pi_V : V \to X$ и число $k \geq 0$, причём для класса Эйлера выполняется $e(V)^k \neq 0$. Пусть даны $k+1$ послойное непрерывное отображение пространства шаров $f_i : B(V) \to B(V)$ $(i = 1, \dots, k+1)$. Тогда найдётся точка $x \in B(V)$, для которой*

$$x = f_1(x) = \dots = f_{k+1}(x).$$

5.5. **Теоремы о центральной точке и Тверберга для трансверсалей.** В работах Zivaljević, Vrećica, Дольникова [134, 135, 136] доказана следующая теорема о трансверсалях, обобщающая одновременно теорему о центральной точке ($k = 0$) и теорему о бутерброде ($k = d - 1$).

Теорема 92 (Zivaljević, Vrećica, Дольников, 1990–1992)**.** *Пусть на $\mathbb{R}^d$ задана $k+1$ абсолютно непрерывная вероятностная мера $\mu_0, \dots, \mu_k$. Тогда найдётся k-плоскость $L \in \mathbb{R}^d$ такая, что для всякого полупространства $H \supseteq L$ и всякого $i = 0, \dots, k$*

$$\mu_i(H) \geq \frac{1}{d-k+1}.$$

В работе автора [69] был с помощью теоремы 91 доказан двойственный вариант этой теоремы (см. обозначение $I(M,k)$ в разделе 4.5, определение 31).

Теорема 93 (Карасёв, 2008). *Пусть на множестве γ_d^{d-k} задано $d-k$ абсолютно непрерывных вероятностных мер $\mu_1, \dots, \mu_{d-k}$ с компактными носителями. Тогда найдётся $d-k-1$-плоскость L такая, что для всякой $d-k$-полуплоскости M с краем L и любого $i = 1, \dots, d-k$*

$$\mu_i(I(M,k)) \geq \frac{1}{k+2}.$$

В 1989 году на Симпозиуме по комбинаторике и геометрии в Стокгольме Тверберг сформулировал следующую гипотезу, которая обобщает теорему 92 в том же духе, как теорема Тверберга обобщает теорему о центральной точке.

Гипотеза 11. *Возьмём число $0 \leq k \leq d-1$ и конечные множества $S_0, S_1, \dots, S_k$ в $\mathbb{R}^d$. Предположим, что $|S_i| = (r_i - 1)(d-k+1) + 1$. Тогда каждое из множеств S_i можно разбить на r_i частей $S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{ir_i}$ так, что множества $\operatorname{conv} S_{ij}$ будут иметь k-трансверсаль.*

В работах Tverberg, Vrećica, Živaljević [137, 128, 138] были доказаны некоторые частные случаи этой гипотезы, в которых требовалась простота чисел r_i. На самом деле доказательства носили топологический характер и формулировались для отображений симплексов в $\mathbb{R}^d$. В работе автора [129] была получена более общая формулировка.

Теорема 94. *Возьмём число $0 \le m \le d-1$, пусть r_i $(i = 0, \dots, m)$ — степени одного и того же простого числа $r_i = p^{k_i}$. Для нечётных p пусть $d-m$ чётно.*

Пусть для всех $i = 0, \dots, m$ отображение f_i непрерывно отображает $(r_i-1)(d-m+1)$-мерный симплекс $\Delta_i = \Delta^{(r_i-1)(d-m+1)}$ в $\mathbb{R}^d$.

Тогда в каждом Δ_i найдутся r_i попарно непересекающихся граней $F_{i1}, F_{i2}, \dots, F_{ir_i} \in \Delta_i$ так, что семейство $\{f_i(F_{ij})\}_{0\le i\le m, j\in[r_i]}$ имеет m-трансверсаль.

Также в работе [129] был доказан аналог топологической цветной теоремы Тверберга для трансверсалей. Его формулировка отличается от приведённого выше утверждения тем, что вместо симплексов Δ_i рассматриваются $d+1$-кратные джойны $K_i = [t_i]^{*d+1}$, где $t_i = 2r_i - 1$.

5.6. **Теоремы типа Борсука-Улама для трансверсалей.** В работе автора [101] из теоремы 82 выводятся некоторые следствия типа Борсука-Улама для плоских трансверсалей.

Определение 57. Пару точек на границе выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^d$ назовём *антиподальной* по отношению к K, если их можно заключить в пару опорных гиперплоскостей к K с противоположными нормалями.

Определение 58. Семейство компактов $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^d$ назовём *неантиподальным*, если никакое $V \in \mathcal{F}$ не содержит пары антиподальных точек по отношению к $\operatorname{conv} \bigcup \mathcal{F}$.

Теорема 95 (Карасёв, 2008)**.** *Если в $\mathbb{R}^d$ дано неантиподальное семейство компактов $\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}| = d+1$, то найдётся k-плоскость, находящаяся от всех множеств семейства на равном расстоянии. Если кроме того $\bigcup \mathcal{F}$ $(d-k)$-выпукло, то у него существует k-трансверсаль.*

Определение 59. Пусть даны два множества $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$. *Уклонением* X от Y называется величина

$$\delta(X, Y) = \sup_{x\in X} \operatorname{dist}(x, Y).$$

Теорема 96 (Карасёв, 2008)**.** *Если в $\mathbb{R}^d$ дано неантиподальное семейство компактов $\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}| = d+1$, то найдётся такая k-плоскость M, что уклонения всех множеств семейства $\mathcal{F}$ от M одинаковы.*

Заметим, что в следствиях 95 и 96 расстояние можно брать в любой норме с гладким единичным шаром. Также в работе [101] получены следующие теоремы типа Борсука-Улама-Люстерника-Шнирельмана.

Определение 60. Для единичной сферы $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ назовём *k-подсферой* всякое пересечение k-мерного линейного подпространства $L \subseteq \mathbb{R}^d$ с S^{d-1}.

Определение 61. Для единичной сферы $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ назовём *k-полусферой* половину некоторой k-подсферы.

Теорема 97 (Карасёв, 2008)**.** *Пусть на сфере S^{d-1} даны d открытых подмножеств $V_1, \dots, V_d$, причём всякое V_i пересекает всякую k-подсферу. Тогда найдётся k-полусфера, пересекающая все множества V_i.*

Теорема 98 (Карасёв, 2008)**.** *Пусть на сфере S^{d-1} даны $d+1$ открытых подмножеств $V_1, \dots, V_{d+1}$, причём всякое V_i пересекает всякую k-подсферу. Тогда либо найдётся k-полусфера, пересекающая все множества V_i; либо для всякого разбиения $\{1, 2, \dots, d+1\} = I_1 \cap I_2$ найдётся пара k-полусфер H_1 и H_2, являющихся половинками одной k-подсферы, такая что $V_i \cap H_1 = \emptyset$ для любого $i \in I_1$ и $V_i \cap H_2 = \emptyset$ для любого $i \in I_2$.*

Список литературы

[1] L. Brouwer, “Über abbildung von mannigfaltigkeiten”, *Mathematische Annalen*, **71** (1910), 97–115.

[2] C. Carathéodory, “Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen”, *Rend. Circ. Mat.*, **32** (1911), 193–217.

[3] J. Radon, “Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten”, *Math. Ann.*, **83** (1921), 113–115.

[4] E. Helly, “Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten”, *Jber Deutsch. Math. Verein.*, **32** (1923), 175–176.

[5] E. Sperner, “Neuer beweis fur die invarianz der dimensionszahl und des gebietes”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar Universitat Hamburg*, **6** (1928), 265–272.

[6] B. Knaster, K. Kuratowski, S. Mazurkiewicz, “Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe”, *Fund. Math.*, **14** (1929), 132–137.

[7] A.W. Tucker, “Some topological properties of disk and sphere”, *Proc. First Canadian Math. Congress* (Montreal, 1945), University of Toronto Press, Toronto, 1946, 285–309.

[8] Л.А. Люстерник, Л.Г. Шнирельман, *Топологические методы в вариационных задачах*, ГИТТЛ, М., 1930.

[9] K. Borsuk, “Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre”, *Fund. Math.*, **20** (1933), 177–190.

[10] A.H. Stone, J.W. Tukey, “Generalized ‘Sandwich’ Theorems”, *Duke Math. J.*, **9** (1942).

[11] H. Steinhaus, “Sur la division des ensembles de l’espaces par les plans et des ensembles plans par les cercles”, *Fund. Math.*, **33** (1945), 245–263.

[12] K. Borsuk, “Über die Zerlegung einer Euklidischen n-dimensionalen Vollkugel in n Mengen”, *Verh. Internat. Math. Kongr.* (Zürich), **2**, 1932, 192.

[13] J. Kahn, G. Kalai, “A Counterexample to Borsuk’s Conjecture”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **29** (1993), 60–62.

[14] B.H. Neumann, “On an invariant of plane regions and mass distributions”, *J. London Math. Soc.*, **20** (1945), 226–237.

[15] R. Rado, “A theorem on general measure”, *J. London Math. Soc.*, **21** (1946), 291–300.

[16] Л.Г. Шнирельман, “О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых”, *Успехи мат. наук*, **10** (1934), 34–44.

[17] S.A. Kakutani, “A proof, that there exists a circumscribing cube around any bounded closed set in $\mathbb{R}^3$”, *Ann. Math.*, **43** (1942), 285-–303.

[18] R.E. Van Kampen, “Komplexe in euklidischen Räumen”, *Abh. Math. Sem.*, **9** (1932), 72–78.

[19] A. Flores, “Über n-dimensionale Komplexe, die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind”, *Ergeb. Math. Kolloq.*, **6** (1932/1934), 4–7.

[20] M.A. Krasnosel’skii, “On special coverings of a finite-dimensional sphere”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **103** (1955), 961–964.

[21] C.-T. Yang, “Continuous functions from spheres to euclidean spaces”, *The Annals of Mathematics, 2nd Ser.*, **62**:2 (1955), 284–292.

[22] C.-T. Yang, “On Theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobo and Dyson, II”, *The Annals of Mathematics, 2nd Ser.*, **62**:2 (1955), 271–283.

[23] A.S. Schwarz, “The genus of a fibre space”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **55** (1966), 49–140.

[24] П. Коннер, Э. Флойд, *Гладкие периодические отображения*, Мир, М., 1969.

[25] А.Ю. Воловиков, “К топологическому обобщению теоремы Тверберга”, *Мат. заметки*, **59**:3 (1996), 454–456.

[26] У И Сян, *Когомологическая теория топологических групп преобразований*, Мир, М., 1979.

[27] А.Ю. Воловиков, “Теорема типа Бурженa–Янга для $\mathbb{Z}_p^n$-действия”, *Мат. сборник*, **183**:7 (1992), 115—144.

[28] А.Ю. Воловиков, Е.В. Щепин, “Антиподы и вложения”, *Мат. сборник*, **196**:1 (2005), 3–32.
[29] А.Ю. Воловиков, “Точки совпадения отображений $\mathbb{Z}_p^k$-пространств в CW-комплексы”, *Успехи мат. наук*, **57**:1 (2002), 153–154.
[30] T. Bartsch, *Topological methods for variational problems with symmetries*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1993.
[31] G. Carlsson, “Equivariant stable homotopy and Segal's Burnside ring conjecture”, *Ann. Math.*, **120** (1984), 189–224.
[32] E. Fadell, S. Husseini, “An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang theorems”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **8** (1988), 73–85.
[33] J. McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, Cambridge University Press, 2001.
[34] К. Браун, *Когомологии групп*, Наука, М., 1987.
[35] R.N. Karasev, “Periodic billiard trajectories in smooth convex bodies”, *Geometric and Functional Analysis* (to appear).
[36] А.Ю. Воловиков, “Точки совпадения отображений Z_p^n-пространств”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:5 (2005), 53–106.
[37] B. Knaster, “Problem 4”, *Colloq. Math.*, **30** (1947), 30–31.
[38] B.S. Kashin, S.J. Szarek, “The Knaster problem and the geometry of high-dimensional cubes”, *Comptes Rendus Mathematique*, **336**:11 (2003), 931–936.
[39] A. Hinrichs, C. Richter, “The Knaster problem: More counterexamples”, *Israel Journal of Mathematics*, **145**:1 (2005), 311–324.
[40] H. Yamabe, Z. Yujobo, “On the continuous function defined on a sphere”, *Osaka Math. J.*, **2**:1 (1950), 19–22.
[41] E.E. Floyd, “Real-valued mappings of spheres”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 957–959.
[42] В.В. Макеев, “Задача Кнастера и почти сферические сечения”, *Мат. сборник*, **180**:3 (1989), 424—431.
[43] А.Ю. Воловиков, “Об одном свойстве функций на сфере”, *Мат. заметки*, **70**:5 (2001), 679–690.
[44] H. Hopf, “Verallgemeinerung bekannter Abildungs- und Überdeckungssätze”, *Port. Math.*, **4** (1943/44), 129–139.
[45] В.В. Макеев, “О некоторых свойствах непрерывных отображений сфер и задачах комбинаторной геометрии”, *Геометрические вопросы теории функций и множеств*, Межвуз. мат. сб., Калинин, 1986, 75–85.
[46] И.К. Бабенко, С.А. Богатый, “К отображению сферы в евклидово пространство”, *Мат. заметки*, **46**:3 (1989), 3–8.
[47] W. Chen, “Counterexamples to Knaster's conjecture”, *Topology*, **37**:2 (1998), 401–405.
[48] А.Ю. Воловиков, “Об индексе G-пространств”, *Мат. сборник*, **191**:9 (2000), 3–22.
[49] M. Kneser, “Aufgabe 360”, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **58**:2 (1955), 27.
[50] L. Lovász, “Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy”, *J. Combinatorial Theory, Ser. A*, **25** (1978), 319–324.
[51] I. Bárány, “A short proof of Kneser's conjecture”, *J. Combinatorial Theory, Ser. A*, **25** (1978), 325–326.
[52] В.Л. Дольников, “О трансверсалях семейств выпуклых множеств”, *Исследования по теории функций многих вещественных переменных*, Ярославль, 1981, 30–36.
[53] N. Alon, P. Frankl, L. Lovász, “The chromatic number of Kneser hypergraphs”, *Transactions Amer. Math. Soc.*, **298** (1986), 359–370.
[54] D.N. Kozlov, *Combinatorial algeraic topology*, Algorithms and computation in mathematics, **21**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2008.
[55] I. Kříž, “Equivariant cohomology and lower bounds fro chromatic numbers”, *Transaction Amer. Math. Soc.*, **333** (1992), 567–577.

[56] I. Kříž, "A correction to "Equivariant cohomology and lower bounds for chromatic numbers"", *Transaction Amer. Math. Soc.*, **352** (2000), 1951–1952.

[57] G.M. Ziegler, "Generalized Kneser coloring theorems with combinatorial proofs", *Invent. Math.*, **147** (2002), 671–691.

[58] А.Ю. Воловиков, "Род G-пространств и нижняя топологическая оценка хроматического числа гиперграфа", *Фундаментальная и прикладная математика*, **11**:4 (2005), 33–48.

[59] H. Tverberg, "A generalization of Radon's theorem", *J. London Math. Soc.*, **41** (1966), 123–128.

[60] I. Bárány, "A generalization of Carathéodory's theorem", *Discrete Math.*, **40** (1982), 141–152.

[61] I. Bárány, D.G. Larman, "A colored version of Tverberg's theorem", *J. London Math. Soc.*, **45**:2 (1992), 314–320.

[62] B. Eaves, "Homotopies for computation of fixed points", *Mathematical Programming*, **3** (1972), 1–22.

[63] R. Kellogg, T. Li, J. Yorke, "Constructive proof of the brouwer fixed point theorem and computational results", *SIAM J. Numer. Anal.*, **13** (1976), 473–483.

[64] I. Bárány, S.B. Shlosman, S. Szücs, "On a topological generalization of a theorem of Tverberg", *J. London Math. Soc., II. Ser.*, **23** (1981), 158–164.

[65] А.Ю. Воловиков, "К теореме ван Кампена–Флореса", *Мат. заметки*, **59**:5 (1996), 663–670.

[66] K.S. Sarkaria, "A generalized van Kampen-Flores theorem", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **111**:2 (1991), 559–565.

[67] R.T. Živaljević, S.T. Vrećica, "The colored Tverberg's problem and complexes of injective functions", *Journal of Comb. Theory, Ser. A.*, **61**:2 (1992), 309–318.

[68] R.T. Živaljević, S.T. Vrećica, "New cases of the colored Tverberg theorem", *Jerusalem Combinatorics '93*, Contemporary Mathematics, eds. H. Barcelo, G. Kalai, Amer. Math. Soc., Providence, 1994, 325–334.

[69] Р.Н. Карасёв, "Двойственные теоремы о центральной точке и их обобщения", *Мат. сборник*, **199**:10 (2008), 41–62.

[70] М.Л. Громов, "О симплексах, вписанных в гиперповерхности", *Мат. заметки*, **5**:1 (1969), 81–89.

[71] H. Guggenheimer, "Finite sets on curves and surfaces", *Israel Journal of Mathematics*, **3**:2 (1965), 104–112.

[72] R.P. Jerrard, "Inscribed squares in plane curves", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **98**:2, 234–241.

[73] I. Pak, "The discrete square peg problem" (to appear).

[74] В.В. Макеев, *Универсально вписанные и описанные многогранники. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук*, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 2003.

[75] В.В. Макеев, "Аффинно-вписанные и аффинно-описанные многоугольники и многогранники", *Записки научных семинаров ПОМИ*, **231** (1995), 286–298.

[76] J.F. Pal, "Über ein elementares Variationprobleme,", *Danske Videnskab. Selskab. Math.-Fys. Meddel*, **3**:2 (1920).

[77] H.G. Eggleston, *Convexity*, Cambridge University Press, 1958.

[78] D. Gale, "On inscribing n-dimensional sets in a regular n-simplex", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4**:2 (1953), 222–225.

[79] В.В. Макеев, "Об аффинных образах ромбододекаэдра, описанных вокруг трехмерного выпуклого тела", *Записки научных семинаров ПОМИ*, **246** (1997), 191–195.

[80] G. Kuperberg, "Circumscribing constant-width bodies with polytopes", *New York J. Math.*, **5** (1999), 91–100.

[81] Р.Н. Карасёв, "Вписывание правильного кроссполитопа", *Мат. заметки* (в печати).

[82] G. Birkhoff, "Dynamical systems", *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, **9** (1927).

[83] N.H. Kuiper, "Double normals of convex bodies", *Israel Journal of Mathematics*, **2** (1964), 71–80.
[84] И.К. Бабенко, "Периодические траектории трехмерных бильярдов Биркгофа", *Мат. сборник*, **181**:9 (1990), 1155–1169.
[85] M. Farber, S. Tabachnikov, "Topology of cyclic configuration spaces and periodic trajectories of multi-dimensional billiards", *Topology*, **41**:3 (2002), 553–589.
[86] M. Farber, "Topology of billiard problems, II", *Duke Mathematical Journal*, **115** (2002), 587–621.
[87] B. Grünbaum, "Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes", *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 1257–1261.
[88] E.A. Ramos, "Equipartition of mass distributions by hyperplanes", *Discrete and Computational Geometry*, **15** (1996), 147–167.
[89] H. Hadwiger, "Simultane Vierteilung zweier Körper", *Arch. Math.*, **17** (1966), 274–278.
[90] D. Avis, "Non-partitionable point sets", *Inform. Process. Lett.*, **19** (1984), 125–129.
[91] P. Mani-Levitska, S. Vrećica, R. Živaljević, "Topology and combinatorics of partitions of masses by hyperplanes", *Advances in Mathematics*, **207**:1 (2006), 266–296.
[92] В.В. Макеев, "Вписанные и описанные многогранники выпуклого тела", *Мат. заметки*, **55**:4 (1994), 128–130.
[93] V.V. Makeev, "Applications of topology to some problems in combinatorial geometry", *Amer. Math. Soc. Transl.*, **174**:2 (1996), 223–228.
[94] S.T. Vrećica, R.T. Živaljević, "The ham-sandwich theorem revisited", *Israel J. Math.*, **78** (1992), 21–32.
[95] S.T. Vrećica, R.T. Živaljević, "Conical equipartitions of mass distributions", *Discrete and Computational Geometry*, **25** (2001), 335–350.
[96] N. Alon, "Splitting necklaces", *Advances in Math.*, **63** (1987), 247–253.
[97] A. Vućić, R. Živaljević, "Note on a conjecture of Sierksma", *Discrete and Computational Geometry*, **9** (1993), 339–349.
[98] M. de Longueville, R.T. Živaljević, "Splitting multidimensional necklaces", *Advances in Mathematics*, **218**:3 (2008), 926–939.
[99] В.В. Макеев, "Шестидольные разбиения трехмерного пространства", *Вестник ЛГУ*, **2** (1988), 31–34.
[100] I. Bárány, A. Hubard, J. Jerónimo, "Slicing convex sets and measures by a hyperplane", *Discrete and Computational Geometry*, **39** (2008), 67–75.
[101] Р.Н. Карасёв, "Теоремы типа Борсука-Улама для плоскостей и плоские трансверсали семейств выпуклых компактов", *Мат. сборник* (в печати).
[102] R.N. Karasev, "Partitions of a polytope and mappings of a point set to facets", *Discrete and Computational Geometry*, **34**:1 (2005), 25–45.
[103] J. Eckhoff, "Helly, Radon, and Carathéodory type theorems", *Handbook of Convex Geometry.*, eds. P.M. Gruber, J.M. Wills, North-Holland, Amsterdam, 1993, 389–448.
[104] J. Leray, "Sur la forme des espaces topologique et sur les points fixes des représentations", *J. Math. Pures Appl.*, **24**:9 (1945), 95–167.
[105] G. Wegner, "d-collapsing and nerves of families of convex sets", *Arch. Math.*, **26** (1975), 317–321.
[106] G. Wegner, *Eigenschaften der Nerven homologisch-einfacher Familien im* $\mathbb{R}^n$, Universität Göttingen, 1967.
[107] M. Katchalski, A. Liu, "A problem of geometry in $\mathbb{R}^n$", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **75**:2 (1979), 284–288.
[108] H. Hadwiger, H. Debrunner, "Über eine Variante zum Hellyschen Satz", *Arch. Math.*, **8** (1957), 309–313.
[109] N. Alon, D.J. Kleitman, "Piercing convex sets and the Hadwiger Debrunner $(p;q)$-problem", *Advances in Math.*, **96** (1992), 103–112.

[110] N. Alon, G. Kalai, J. Matoušek, R. Meshulam, “Transversal numbers for hypergraphs arising in geometry”, *Advances in Applied Mathematics*, **29**:1 (2002), 79–101.
[111] G. Kalai, R. Meshulam, “A topological colorful Helly theorem”, *Advances in Mathematics*, **191**:2 (2005), 305–311.
[112] R.B. Bapat, “A constructive proof of a permutation-based generalization of Sperner’s lemma”, *Mathematical Programming*, **44** (1989), 113–120.
[113] Р.Н. Карасёв, “Раскрашенная версия леммы Кнастера-Куратовского-Мазуркевича”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **13**:2 (2006), 66–70.
[114] G. Tardos, “Transversals of 2-intervals, a topological approach”, *Combinatorica*, **15**:1 (1995), 123–134.
[115] G. Tardos, “Trasversals of d-intervals — comparing three approaches”, *Proceedings of the Second European Congress of Mathematics*, Progress in Mathematics, **169**, Birkhauser, 1998, 234–243.
[116] H. Hadwiger, “Über Eibereiche mit gemeinsamer Treffgeraden”, *Portugal Math.*, **16** (1957), 23–29.
[117] M. Katchalski, T. Lewis, “Cutting families of convex sets”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **79** (1980), 457–461.
[118] H. Tverberg, “Proof of Grünbaum’s conjecture on common transversals for translates”, *Discrete and Computational Geometry*, **4** (1989), 191–203.
[119] A. Holmsen, M. Katchalski, T. Lewis, “A Helly-type theorem for line transversals to disjoint unit balls”, *Discrete and Computational Geometry*, **29** (2003), 595–602.
[120] O. Cheong, X. Goaoc, A. Holmsen, S. Petitjean, “Helly-type theorems for line transversals to disjoint unit balls”, *Discrete and Computational Geometry*, **39**:1–3 (2008), 194–212.
[121] A. Holmsen, J. Matoušek, “No Helly theorem for stabbing translates by lines in $\mathbb{R}^3$”, *Discrete and Computational Geometry*, **31** (2004), 405–410.
[122] B. Aronov, J.E. Goodman, R. Pollack, R. Wenger, “On the Helly number for hyperplane transversals to unit balls”, *Discrete and Computational Geometry*, **24** (2000), 171–176.
[123] J.E. Goodman, R. Pollack, “Hadwiger’s transversal theorem in higher dimensions”, *J. Amer. Math. Soc.*, **1** (1988), 301–309.
[124] A. Holmsen, “The Katchalski–Lewis transversal problem in $\mathbb{R}^n$”, *Discrete and Computational Geometry*, **37** (2007), 341–349.
[125] A. Horn, “Some generalization of Helly’s theorem on convex sets”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 923–929.
[126] V. Klee, “On certain intersection properties of convex sets”, *Canad. J. Math.*, **3** (1951), 272–275.
[127] В.Л. Дольников, “Обобщенные трансверсали семейств множеств в $\mathbb{R}^n$ и связи между теоремами Хелли и Борсука”, *Докл. АН СССР*, **297**:4 (1987), 777–780.
[128] R.T. Živaljević, “The Tverberg-Vrećica problem and the combinatorial geometry on vector bundles”, *Israel J. Math.*, **111** (1999), 53–76.
[129] R.N. Karasev, “Tverberg’s transversal conjecture and analogues of nonembeddability theorems for transversals”, *Discrete and Computational Geometry*, **38**:3 (2007), 513–525.
[130] H.L. Hiller, “On the cohomology of real grassmanians”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **257**:2 (1980), 521–533.
[131] H.L. Hiller, “On the height of the first Stiefel-Whitney class”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **79**:3 (1980), 495–498.
[132] М.Л. Громов, “Об одной геометрической гипотезе Банаха”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31**:5 (1967), 1105–1114.
[133] E. Makai, S. Vrećica, R. Živaljević, “Plane sections of convex bodies of maximal volume”, *Discrete and Computational Geometry*, **25**:1 (2001), 33–49.
[134] R.T. Živaljević, S.T. Vrećica, “An extension of the ham sandwich theorem”, *Bull. London Math. Soc.*, **22** (1990), 183–186.

[135] В.Л. Дольников, “О разбиении системы мер подпространством многочленов”, *Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики*, Доклады 8 Всесоюзного семинара «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики» (Красновидово 7–11 октября 1990), ИПМ им. Келдыша, Москва, 1991, 80–85.

[136] В.Л. Дольников, “Об одном обобщении теоремы о бутерброде”, *Мат. заметки*, **52**:2 (1992), 112–133.

[137] H. Tverberg, S. Vrećica, “On generalizations of Radon’s theorem and the ham sandwich theorem”, *Europ. J. Combinatorics*, **14** (1993), 259–264..

[138] S.T. Vrećica, “Tverberg's conjecture”, *Discrete and Computational Geometry*, **29** (2003), 505–510.