# ВПИСЫВАНИЕ ПРАВИЛЬНОГО КРОССПОЛИТОПА

Р.Н. КАРАСЁВ

Аннотация. В работе доказывается результат о возможности вписать правильный кросполитоп (многомерный октаэдр) в выпуклое тело в $\mathbb{R}^d$, где $d$ является нечётной степенью простого числа. Также доказываются некоторые обобщения этого утверждения.

УДК 514.17

## 1. Введение

Задачи о возможности вписать (или описать) многогранник из некоторого заданного семейства в произвольное (гладкое) выпуклое тело имеют давнюю историю. В работе [2] доказывалось, что во всякую простую гладкую замкнутую кривую на плоскости можно вписать квадрат (теорема Шнирельмана). В работе [1] доказывалось, что вокруг всякого выпуклого тела в $\mathbb{R}^3$ можно описать куб. В работе [7] доказывалось, что если гладкая замкнутая гиперповерхность $H \subset \mathbb{R}^d$ ограничивает область с ненулевой эйлеровой характеристикой, то в $H$ можно вписать симплекс, положительно гомотетичный наперёд заданному симплексу.

Обсуждение вопросов вписывания некоторых классов многогранников имеется в книге [8]. Более современные ссылки по вопросам вписывания/описывания можно найти в работах [14, 17]. Кроме того, задачи о вписывании и описывании часто оказываются связаны с задачей Кнастера [3] о поверхностях уровня функции на сфере.

**Гипотеза 1** (Задача Кнастера для функций). *Пусть $S^{d-1}$ — единичная сфера $\mathbb{R}^d$. Предположим, что даны $d$ точек $x_1, \dots, x_d \in S^{d-1}$ и непрерывная функция $f : S^{d-1} \to \mathbb{R}$. Тогда существует вращение $\rho \in SO(d)$ такое, что*

$$f(\rho(x_1)) = f(\rho(x_2)) = \dots = f(\rho(x_d)).$$

В работах [15, 16] найдены контрпримеры к задаче Кнастера в достаточно больших размерностях $d$, но в некоторых частных случаях имеются и положительные решения задачи. В разделе 3 будет использовано положительное решение задачи Кнастера в одном частном случае с помощью препятствия в виде класса Эйлера векторного расслоения.

В книге [13] сформулирована задача (Задача 11.5) о вписывании правильного октаэдра в произвольное выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$. Эта задача, по сути, была решена для

Исследование выполнено при поддержке гранта Президента РФ МК-1005.2008.1, АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/500, при частичной финансовой поддержке фонда «Династия».

размерности 3 и гладкого тела в [14]. В данной работе решается аналогичная задача для некоторых размерностей, больших трёх.

**Определение 1.** *Ортогональным крестом* в $\mathbb{R}^d$ назовем $d$ взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через точку $o$ — *центр креста.*

**Определение 2.** Пусть $(e_1, \dots, e_d)$ — некоторый базис в $\mathbb{R}^d$. *Кросполитопом* в $\mathbb{R}^d$ назовем выпуклую оболочку точек

$$e_1, -e_1, e_2, -e_2, \dots, e_d, -e_d$$

и все ее образы при движениях. Если базис ортогональный и длины всех векторов базиса равны, то будем говорить, что кросcполитоп *правильный*.

**Определение 3.** Назовём выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^d$ *неугловатым*, если никакая его граничная точка не является центром ортогонального креста $C$, для которого $C \cap \operatorname{int} K = \emptyset$.

Очевидно, гладкие выпуклые тела не угловаты. Сформулируем результаты работы:

**Теорема 1.** *Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ — неугловатое выпуклое тело, а $d$ — нечётная степень простого. Тогда найдётся правильный кроссполитоп $C \subset \mathbb{R}^d$, все вершины которого лежат на границе $K$.*

То же доказательство проходит и для утверждения:

**Теорема 2.** *Пусть $H \subset \mathbb{R}^d$ — образ гладкого вложения $S^{d-1}$, $d = p^k$ — нечётная степень простого. Пусть $(e_1, \dots, e_d)$ — некоторый (не обязательно ортогональный) базис $\mathbb{R}^d$, кроссполитоп $C$ — выпуклая оболочка векторов $(\pm e_1, \dots, \pm e_d)$.*

*Предположим, что группа $(Z_p)^k$ действует транзитивно на векторах базиса $(e_1, \dots, e_d)$ и её действие продолжается до действия на $\mathbb{R}^d$ ортогональными преобразованиями. Тогда найдётся кроссполитоп $C' \subset \mathbb{R}^d$, подобный $C$, все вершины которого лежат на $H$.*

Следует отметить, что утверждение о вписывании кроссполитопа в центрально-симметричное выпуклое тело непосредственно следует из положительного решения задачи Кнастера [4] для системы точек, состоящей из концов векторов некоторого ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^d$ и это утверждение верно при любом натуральном $d$.

Теорема 2 для правильного кроссполитопа в любой размерности была заявлена в [6], однако в качестве доказательства было указано, что проходят все рассуждения аналогично двумерному случаю. Двумерный же случай (теорема Шнирельмана) в работе [6] также по сути не был доказан, основная лемма этой работы о непрерывной зависимости вписанного квадрата от гладкой кривой принципиально неверна и к ней существуют простые контрпримеры. В доказательстве теоремы Шнирельмана [2] принципиально, что чётность количества вписанных квадратов не меняется при деформациях кривой, однако в многомерном случае вписанные кроссполитопы составляют многообразие положительной размерности и рассуждение с чётностью не проходит.

В случае $d = 2$ (теорема Шнирельмана) приведённая здесь техника не применима. В этом случае требуется рассмотреть действие бо́льшей группы симметрий на квадрате (как минимум $Z_4$), см. обзор [19].

## 2. Сведение вписывания в гладкое выпуклое тело к топологическому утверждению

Обозначим $\{1, 2, \dots, n\} = [n]$.

Докажем сначала утверждение теоремы 1 для строго выпуклых неугловатых $K$. Также это будет доказательством теоремы 2 для случая, когда $H$ — граница гладкого строго выпуклого тела $K$.

Пусть $R$ — пространство положительно ориентированных ортонормированных реперов в $\mathbb{R}^d$. А в случае теоремы 2 это будет пространство реперов, получающихся из исходного собственным ортогональным преобразованием. В обоих случаях $R$ естественно отождествляется с $SO(d)$. Заметим, что в случае теоремы 2 длины векторов репера равны, будем считать их единичными.

Построим непрерывное отображение $g$ пространства $K \times R$ в линейное пространство $V = \mathbb{R}^{2d}$ следующим образом. Для точки $p \in K$ и репера $(e_1, \dots, e_d) \in R$ положим для любого $i \in [d]$

$$a_i = \max\{a : p + ae_i \in K\}, \quad b_i = \max\{a : p - ae_i \in K\},$$

таким образом отображение построено. Легко заметить, что для строго выпуклых $K$ оно непрерывно.

Заменим координаты в $V$ на $s_i = a_i + b_i, t_i = a_i - b_i$. рассмотрим одномерное подпространство $L \subset V$, заданное соотношениями

$$t_1 = \dots = t_d = 0, \quad s_1 = \dots = s_d,$$

В факторе $V/L$ обозначим $d$-мерную линейную оболочку $\{t_1, \dots, t_d\}$ за $U$, $d-1$-мерную линейную оболочку $\{s_1, \dots, s_d\}$ за $W$. Заметим, что нам достаточно доказать, что построенное отображение $f : K \times R \to U \oplus W$ отображает некоторую пару $(p, r) \in \operatorname{int} K \times R$ в нуль.

## 3. Нахождение препятствия

Далее когомологии рассматриваются с коэффициентами в $Z_p$, обозначение коэффициентов опускается. Необходимые сведения по алгебраической топологии можно найти в книгах [9, 10, 11].

Заметим, что для неугловатого $K$ отображение $f$ не отображает в нуль ни одну пару $(p, r) \in \partial K \times R$. Также заметим, что если $d = p^k$, то в случае теоремы 1 можно задать свободное действие группы $G = (Z_p)^k$ на реперах $R$ перестановками векторов и на координатах $t_i, s_i$ в $U$ и $V$ аналогичными перестановками. В случае теоремы 2 транзитивное действие $G$ на $R$ уже задано по условию теоремы.

Тогда отображение $f$ превращается в сечение эквивариантного $G$-расслоения над $G$-пространством и первое препятствие к продолжению ненулевого сечения $f$ с $\partial K \times R$

на $K \times R$ является относительным классом Эйлера (см. [5, 18]) и лежит в $H_G^{2d-1}(K \times R, \partial K \times R)$.

Наше сечение $f$ разлагается в сумму сечений $s_U$ и $s_W$ соответствующих $G$-расслоений. При этом сечение $s_U$ не обращается в нуль над $\partial K \times R$ и даёт некоторый относительный класс Эйлера $e(s_U) \in H_G^d(K \times R, \partial K \times R)$, сечение $s_W$ имеет класс Эйлера $e(s_W) \in H_G^{d-1}(K \times R) = H_G^{d-1}(R)$. Первое препятствие к построению ненулевого $f$, таким образом, равно $e(f) = e(s_U)e(s_W)$.

По формуле Кюннета алгебра когомологий $H_G^*(K \times R, \partial K \times R)$ равна тензорному произведению $H^*(K, \partial K) \otimes H_G^*(R)$, то есть имеет вид $u \times H_G^*(R)$, где $u$ — $d$-мерная образующая $H^*(K, \partial K)$.

Найдём класс $e(s_U)$. Заметим, что при непрерывных деформациях $K$, оставляющих его неугловатым, этот класс не изменится. Такими деформациями можно превратить $K$ в единичный шар $B$. Но для $B$ можно зафиксировать $r$ в паре $(p, r) \in B \times R$ и заметить, что сечение $s_U$ имеет один невырожденный нуль в $B \times \{r\}$. Следовательно, образ класса $e(s_U)$ при естественном отображении $H_G^d(B \times R, \partial B \times R) \to H^d(B, \partial B)$ даёт образующую $H^d(B, \partial B)$, значит $e(s_U) = u \times 1 \in H_G^*(K \times R, \partial K \times R)$.

Теперь заметим, что класс Эйлера $e(s_W)$ совпадает с препятствием, которое приводит к положительному решению частного случая задачи Кнастера в [12]. По определению $W = \mathbb{R}[G]/\mathbb{R}$ как $G$-представление, и это представление не имеет слагаемых с тривиальным действием $G$, из чего (см. [9], глава III §1) следует, что класс Эйлера представления в когомологиях классифицирующего пространства $e(W) \in H_G^{d-1}(EG) = H^{d-1}(BG)$ не равен нулю. Обозначим естественное классифицирующее $G$-отображение $p : R \to EG$. В работе [12] рассмотрено действие $G$ на $SO(d)$, $G$-гомотопически эквивалентное рассматриваемому здесь действию $G$ на $R$ и ([12], Предложение 3 на стр. 127) показано, что отображение когомологий $p^* : H_G^m(EG) \to H_G^m(SO(d)) = H_G^m(R)$ инъективно для всех $m < 2(p^k - p^{k-1})$, а значит $e(s_W) = p^*e(W) \neq 0$.

Следовательно, $e(f) = u \times e(s_W) \neq 0$ по формуле Кюннета.

## 4. Рассмотрение случая нестрого выпуклых тел

Построим последовательность строго выпуклых гладких тел $K_n$, сходящуюся в метрике Хаусдорфа к $K$. Для каждой из них наша теорема даёт вписанный кросcполитоп $C_n$. Множество кросcполитопов, вершины которых принадлежат некоторому компакту, компактно, значит можно перейти к подпоследовательности и считать, что $C_n$ стремятся к некоторому (возможно, вырожденному) кросcполитопу $C$.

Предположим, что $C$ — вырожденный кросcполитоп, то есть одна точка. Из соображений компактности можно считать, что направляющий крест $C_n$ стремится к некоторому кресту $X$, центр которого совпадает с $C \in \partial K$. Крест $X$ должен иметь непустое пересечение с $\operatorname{int} K$ (из неугловатости в теореме 1 или из гладкости в теореме 2) положительной длины $\varepsilon$. Это значит, что некоторая прямая креста $X$, обозначим её $l$, пересекает $\operatorname{int} K$ по открытому отрезку $\sigma$ длины не менее $\varepsilon$, который не содержит центра $X$.

Рассмотрим направляющие кресты $X_n$ кросснолитопов $C_n$, достаточно близкие к $X$. Их соответствующие прямые $l_n$ пересекают $\operatorname{int} K_n$ по открытым отрезкам $\sigma_n$, которые стремятся к $\sigma$. Легко заметить, что для достаточно больших $n$ центр $\sigma_n$ не будет совпадать с центром $X_n$, значит $X_n$ не может быть направляющим крестом вписанного кроссполитопа. Полученное противоречие доказывает, что $C$ не вырожден.

Избавиться от условия неугловатости в теореме 1 автору пока не удалось, так как в угловатом случае возможно вырождение при рассмотрении последовательности выпуклых тел.

## 5. Вписывание в невыпуклую гиперповерхность

Докажем теперь теорему 2 для случая произвольной гиперповерхности $H$ (являющейся гладко вложенной сферой). Опишем пространство всевозможных кроссполитопов, подобных $C$. Поверхность $H$ может быть гладко деформирована в некоторый эллипсоид с разными полуосями, пусть при этой деформации её образ $H_t$ остаётся внутри некоторого шара $B$. Множество кроссполитопов, подобных $C$ и имеющих центр в $B$, параметризуется $B\times I\times SO(d)$, где $B$ параметризует центры, $SO(d)$ параметризует вращения, $I=[a,b]$ параметризует гомотетии.

Если выбрать достаточно малое $a$ и достаточно большое $b$, то кроссполитопы размеров $a$ и $b$ не будут вписаны в $H_t$ ни при каком $t$. Положим $L=\partial B\times I\times SO(d)\bigcup B\times \partial I\times SO(d)$. Пусть $G=(Z_p)^k$ действует на $SO(d)$, как указано выше. Тогда по формуле Кюннета $H^*_G(B\times I\times SO(d),L)=u\times v\times H^*_G(SO(d))$, где $u$ — образующая $H^d(B,\partial B)$, $v$ — образующая $H^1(I,\partial I)$.

Каждая поверхность $H_t$ может быть задана как множество невырожденных нулей некоторой гладкой функции $f_t$, которую можно считать непрерывно зависящей от $t$ (так как гомотопия $H_t$ может быть продолжена до изотопии всего пространства $\mathbb{R}^d$). Рассмотрим отображение $g_t : B\times I\times SO(d)\to\mathbb{R}^{2d}$, которое отображает набор $(x,\lambda,\rho)$ в набор

$$(f_t(x+\lambda\rho(e_1)), f_t(x+\lambda\rho(-e_1)),\dots, f_t(x+\lambda\rho(e_d)), f_t(x+\lambda\rho(-e_d)))\,.$$

Отображение $g_t$ коммутирует с действием $G$ на $B\times I\times SO(d)$ и действием $G$ на $\mathbb{R}^{2d}$ перестановками координат. Следовательно, имеет смысл рассмотреть класс Эйлера $e(g_t)\in H^{2d}_G(B\times I\times SO(d),L)$. При деформации этот класс не меняется, значит достаточно вычислить его в случае, когда $H_t$ — эллипсоид. Действуя, как в разделе 3, находим, что в таком случае $e(g_t)=u\times v\times e(W)\neq 0$. Это значит, что множество нулей отображения $g_t$ непусто и в каждую $H_t$ вписывается кроссполитоп, и даже (аналогично результатам [12]) семейство кроссполитопов размерности не менее $\dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$.

## 6. Заключение

Автор выражает благодарность А.Ю. Воловикову за содержательное обсуждение результатов.

## Список литературы


[1] S.A. Kakutani, “A proof, that there exists a circumscribing cube around any bounded closed set in $\mathbb{R}^3$”, *Ann. Math.*, **43** (1942), 285-–303.
[2] Л.Г. Шнирельман, “О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых”, *Успехи мат. наук*, **10** (1944), 34–44.
[3] B. Knaster, “Problem 4”, *Colloq. Math.*, **30** (1947), 30–31.
[4] H. Yamabe, Z. Yujobo, “On the continuous function defined on a sphere”, *Osaka Math. J.*, **2**:1 (1950), 19–22.
[5] M.A. Kervaire, “Relative Characteristic Classes”, *American Journal of Mathematics*, **79**:3 (1957), 517–558.
[6] H. Guggenheimer, “Finite sets on curves and surfaces”, *Israel Journal of Mathematics*, **3**:2 (1965), 104–112.
[7] М.Л. Громов, “О симплексах, вписанных в гиперповерхности”, *Мат. заметки*, **5**:1 (1969), 81–89.
[8] Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел*, Наука, М., 1971.
[9] У И Сян, *Когомологическая теория топологических групп преобразований*, Мир, М., 1979.
[10] Д. Милнор, Д. Сташеф, *Характеристические классы*, Мир, М., 1979.
[11] А.С. Мищенко, *Векторные расслоение и их применения*, Наука, М., 1984.
[12] А.Ю. Воловиков, “Теорема типа Буржена–Янга для $\mathbb{Z}_p^n$-действия”, *Мат. сборник*, **183**:7 (1992), 115—144.
[13] V. Klee, S. Wagon, *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*, Dolciani Mathematical Expositions, The Mathematical Association of America, 1996.
[14] В.В. Макеев, *Универсально вписанные и описанные многогранники. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук*, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 2003.
[15] B.S. Kashin, S.J. Szarek, “The Knaster problem and the geometry of high-dimensional cubes”, *Comptes Rendus Mathematique*, **336**:11 (2003), 931–936.
[16] A. Hinrichs, C. Richter, “The Knaster problem: More counterexamples”, *Israel Journal of Mathematics*, **145**:1 (2005), 311–324.
[17] В.В. Макеев, “Вписанные и описанные многогранники для выпуклого тела и задача о непрерывных функциях на сфере в евклидовом пространстве”, *Алгебра и анализ*, **18** (2006), 187–204.
[18] Р.Н. Карасёв, “Двойственные теоремы о центральной точке и их обобщения”, *Мат. сборник*, **199**:10 (2008), 41–62.
[19] Р.Н. Карасёв, “Топологические методы в комбинаторной геометрии”, *Успехи мат. наук*, **63**:6(384) (2008), 39–90.



141700, г. Долгопрудный, Институтский пер. 9, кафедра высшей математики, Р.Н. Карасёв

*E-mail address*: r_n_karasev@mail.ru