ТЕОРЕМЫ ТИПА БОРСУКА-УЛАМА ДЛЯ ПЛОСКОСТЕЙ И ПЛОСКИЕ ТРАНСВЕРСАЛИ СЕМЕЙСТВ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ

Р.Н. КАРАСЁВ

Аннотация. В работе доказываются результаты о топологии пространства k-плоскостей в $\mathbb{R}^n$, близкие к теореме Борсука-Улама о покрытиях сферы и шара. Из этих результатов выводятся геометрические следствия о существовании плоских трансверсалей для семейств подмножеств $\mathbb{R}^n$ и результаты о делении мер гиперплоскостями.

УДК 514.17, 514.172

1. Введение

Приведём формулировки классических результатов, аналоги которых будут доказаны в этой работе. Сформулируем теорему Борсука-Улама о покрытиях сферы [1].

Теорема (Теорема Борсука-Улама). *Если сфера S^n покрыта $n+1$-м замкнутым множеством $X_1, \dots, X_{n+1}$, то по крайней мере одно из X_i содержит пару диаметрально противоположных точек на сфере.*

Можно также привести вариант этой теоремы для покрытий шара.

Теорема (Теорема Борсука-Улама для покрытий шара). *Пусть шар B^n покрыт замкнутыми множествами $X_1, \dots, X_{n+1}$, причём пересечения каждого X_i с границей ∂B^n не содержат диаметрально противоположных точек. Тогда пересечение множеств X_i непусто.*

В этой работе теорема Борсука-Улама для покрытий будет обобщена и применена к конкретным конфигурационным пространствам k-плоскостей.

Сформулируем другую известную теорему о пересечении выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$ — теорему Хелли [2].

Теорема (Теорема Хелли). *Пусть $\mathcal{F}$ — конечное семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$. Тогда семейство $\mathcal{F}$ имеет общую точку тогда и только тогда, когда всякое подсемейство $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ с размером $|\mathcal{G}| \le n+1$ имеет общую точку.*

2000 *Mathematics Subject Classification.* 52A35,55M30,55M35.

Key words and phrases. теорема Борсука-Улама, плоские трансверсали, теоремы типа Хелли.

Исследование выполнено при поддержке гранта Президента РФ МК-1005.2008.1, АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/500, при частичной финансовой поддержке фонда «Династия».

Сформулируем также обобщение теоремы Хелли, которое будет использоваться в этой работе, см. [3].

Теорема (Цветная теорема Хелли)**.** *Пусть $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{n+1}$ — семейства выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$. Пусть также для всякой системы представителей $\{X_i \in \mathcal{F}_i\}_{i=1}^{n+1}$ пересечение $\bigcap_{i=1}^{n+1} X_i$ непусто. Тогда для некоторого i пересечение $\bigcap \mathcal{F}_i$ непусто.*

Теорема Хелли даёт критерий существования общей точки семейства выпуклых множеств в терминах существования общей точки всех подсемейств фиксированного размера. В этой работе в основном рассматривается вопрос построения плоскости данной размерности, пересекающей данное семейство множеств. Введём определения.

Определение. *k-плоскостью* в $\mathbb{R}^n$ назовём аффинное многообразие размерности k в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Если k-плоскость L пересекает каждое множество из семейства $\mathcal{F}$, то L называется (плоской) *k-трансверсалью* семейства $\mathcal{F}$.

При рассмотрении вопроса о существовании k-трансверсали оказывается, что прямого аналога теоремы Хелли нет, поэтому приходится разными способами модифицировать исходные условия и вывод в теоремах типа Хелли, см., например, работы [4, 5], в которых обсуждаются такие теоремы.

Сформулируем один из результатов (см. [6, 7]) о плоских трансверсалях, который обобщает теорему Хелли.

Теорема (Теорема Хорна-Кли)**.** *Для натуральных $1 \le k \le d$ и семейства $\mathcal{F}$ выпуклых компактов в $\mathbb{R}^d$, следующие три условия эквивалентны:*

1) Каждые k множеств из $\mathcal{F}$ имеют общую точку;

2) Каждая плоскость коразмерности $k-1$ в $\mathbb{R}^d$ имеет транслят, пересекающий все множества $\mathcal{F}$;

3) Каждая плоскость коразмерности k в $\mathbb{R}^d$ принадлежит плоскости коразмерности $k-1$, пересекающий все множества $\mathcal{F}$.

В разделе 8 этой работы доказываются некоторые теоремы об общих трансверсалях, близкие к цветной теореме Хелли и теореме Хорна-Кли. Также в разделе 7 доказываются теоремы типа Борсука-Улама, дающие достаточные условия существования трансверсали семейства из $n+1$ множества в $\mathbb{R}^n$.

Сформулируем результат о делении мер (см. [8, 9]), являющийся следствием теоремы Борсука-Улама.

Теорема (Теорема "о бутерброде")**.** *Пусть на $\mathbb{R}^d$ заданы d абсолютно непрерывных вероятностных мер $\mu_1, \dots, \mu_d$. Тогда найдётся полупространство $H \subset \mathbb{R}^d$ такое, что для любого $i = 1, \dots, d$*

$$\mu_i(H) = 1/2.$$

Естественно поставить вопрос: можно ли поделить меры не пополам, иначе говоря, найти для заданных $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in [0,1]^d$ такое полупространство $H \subseteq \mathbb{R}^d$, что $\mu_i(H) =$

α_i для любого $i = 1, \dots, d$. В работах [10, 5, 11] показано, что для этого достаточно, чтобы носители мер были вполне отделимы, то есть для всякого выбора по одной точке x_i в носителе μ_i, набор $(x_1, \dots, x_d)$ был аффинно независимым.

В разделе 6 изучаются вопросы деления мер гиперплоскостями, доказывается усиление этого результата и другие результаты.

2. Теоремы о каноническом расслоении над грассманианом

В этом разделе формулируются теоремы о конфигурационном пространстве k-плоскостей в $\mathbb{R}^n$, которые являются основными инструментами для получения следствий о трансверсалях и делении мер.

Обозначим стандартно $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

Определение. Подмножества X и Y линейного пространства L *отделимы*, если найдётся линейная функция (многочлен степени не более 1) $l : L \to \mathbb{R}$ такая, что $l(X) < 0$ и $l(Y) > 0$.

Определение. Семейства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ подмножеств линейного пространства L *отделимы*, если найдётся линейная функция $l : L \to \mathbb{R}$ такая, что $l(X) < 0$ для любого $X \in \mathcal{F}$ и $l(Y) > 0$ для любого $Y \in \mathcal{G}$.

Определение. Два семейства отрезков на прямой $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ назовём *выравненными*, если выполняется одна из альтернатив:

1) все правые концы $\mathcal{A}$ попали в одну и ту же точку a, все левые концы $\mathcal{B}$ попали в одну и ту же точку b, и либо a левее b, либо все отрезки семейства $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ содержат отрезок $[ba]$;

2) все правые концы $\mathcal{B}$ попали в одну и ту же точку b, все левые концы $\mathcal{A}$ попали в одну и ту же точку a, и либо b левее a, либо все отрезки семейства $\mathcal{B} \cup \mathcal{A}$ содержат отрезок $[ab]$.

Обозначим за γ_n^k каноническое расслоение над грассманианом G_n^k, то есть множеством k-мерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$.

Непрерывная зависимость выпуклого компакта от параметра далее понимается в смысле метрики Хаусдорфа.

Теорема 1. *Рассмотрим $n+1$ замкнутое подмножество $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ в γ_n^1, для которых пересечение V_i с любым слоем L является непустым отрезком (возможно, точкой), непрерывно зависящим от L. Тогда выполняется одна из альтернатив:*

1) найдётся такой слой L и индекс $i \in [n+1]$, что $V_i \cap L$ содержится в остальных $V_j \cap L$;

2) для всякого разбиения семейства $\{V_i\}$ на два семейства $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ найдётся такой слой L, что семейства

$$\mathcal{F}_1(L) = \{U \cap L : U \in \mathcal{F}_1\} \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_2(L) = \{U \cap L : U \in \mathcal{F}_2\}$$

выравнены в L.

Очевидно, пара выравненных семейств либо отделима, либо имеет общую точку. Поэтому из теоремы 1 следует такое утверждение:

Следствие 2. *Рассмотрим $n+1$ замкнутое подмножество $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ в γ_n^1, для которых пересечение V_i с любым слоем L является непустым отрезком (возможно, точкой), непрерывно зависящим от L. Тогда либо множества V_i имеют общую точку; либо для всякого разбиения семейства $\{V_i\}$ на два семейства $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ найдётся такой слой L, что семейства*

$$\mathcal{F}_1(L) = \{U \cap L : U \in \mathcal{F}_1\} \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_2(L) = \{U \cap L : U \in \mathcal{F}_2\}$$

отделимы в L.

Теперь сформулируем утверждения для произвольного k и канонического расслоения $\gamma_n^k \to G_n^k$. Сначала нам понадобятся несколько определений.

Определение. Пару точек на границе выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ назовём *антиподальной* по отношению к K, если их можно заключить в пару опорных гиперплоскостей к K с противоположными нормалями.

Заметим, что точки x и y антиподальны относительно K тогда и только тогда, когда они являются концами аффинного диаметра K.

Определение. Семейство компактов $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^n$ назовём *неантиподальным*, если никакое $V \in \mathcal{F}$ не содержит пары антиподальных точек по отношению к $\operatorname{conv} \bigcup \mathcal{F}$.

Далее при рассмотрении векторных расслоений будем считать, что на каждом слое задана норма с гладким единичным шаром и эта норма непрерывно зависит от слоя. В частности, на γ_n^k расстояние может быть стандартным евклидовым.

Теорема 3. *Рассмотрим $n+1$ компактное множество $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ в γ_n^k, для которых при любом $i = 1, \dots, n+1$ пересечение $V_i \cap L$ непусто и непрерывно зависит от L в метрике Хаусдорфа. Предположим, что для всякого слоя $L \in G_n^k$ семейство $\{V_i \cap L\}_{i=1}^{n+1}$ неантиподально как семейство компактов в L. Тогда найдётся точка x в некотором слое L, которая находится на одинаковом расстоянии от всех $V_i \cap L$.*

Теорема 4. *Рассмотрим $n+1$ компактное множество $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ в γ_n^k, для которых при любом $i = 1, \dots, n+1$ пересечение $V_i \cap L$ непусто и непрерывно зависит от L в метрике Хаусдорфа. Предположим, что для всякого слоя $L \in G_n^k$ семейство $\{V_i \cap L\}_{i=1}^{n+1}$ неантиподально как семейство компактов в L и множество $\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i\right) \cap L$ выпукло. Тогда множества V_i имеют общую точку.*

Следующая теорема даёт частичное продвижение по гипотезе о полях многогранников в расслоении γ_n^k (см. [12], Гипотеза 1 и Теорема 12).

Теорема 5. *Пусть в расслоении γ_n^k даны m непрерывных сечений $s_1, \dots, s_m$, причём для всякого $L \in G_n^k$ многогранник $P(L) = \operatorname{conv}\{s_1(L), \dots, s_m(L)\}$ имеет непустую внутренность. Тогда найдётся такой слой $L \in G_n^k$ и пара непересекающихся опорных к $P(L)$ полупространств $H_1, H_2 \subset L$, что множество $H_1 \cup H_2$ содержит не менее $n+1$ точки из $\{s_1(L), \dots, s_m(L)\}$.*

В разделах 6, 7, 8 содержатся формулировки следствий из вышеприведённых теорем и некоторые другие результаты, полученные применением аналогичной техники.

3. Вспомогательные топологические утверждения

Напомним пару определений из эквивариантной топологии, более подробное обсуждение можно найти в книге [13].

Определение. Пусть G — компактная топологическая группа или конечная группа с дискретной топологией. Пространство, на котором задано непрерывное действие группы G называется *G-пространством*, непрерывное отображение между G-пространствами, перестановочное с действием группы G, называется *G-отображением* или *эквивариантным отображением*. G-пространство называется свободным, если действие G на нём свободно.

Напомним, что существует универсальное свободное G пространство E_G, то есть любое другое свободное G-пространство можно эквивариантно отобразить в него. При этом само пространство E_G гомотопически тривиально, а фактор E_G/G обозначается B_G. Также для всякого G-пространства X и абелевой группы A можно определить группы эквивариантных когомологий $H^*_G(X, A) = H^*(X \times_G E_G, A)$, для свободных пространств имеем равенство $H^*_G(X, A) = H^*(X/G, A)$.

Далее мы будем работать с группой $G = Z_2$. Напомним, что $H^*_G(\mathrm{pt}, Z_2) = H^*(\mathbb{R}P^\infty, Z_2) = Z_2[w] = \Lambda$, где $\dim w = 1$. Наличие естественного эквивариантного отображения $X \to \mathrm{pt}$ для любого Z_2-пространства X даёт естественное отображение $\Lambda \to H^*_G(X, Z_2)$, образ w при этом отображении мы будем также обозначать w, если это не вызывает путаницы. Образующую группы Z_2 будем обозначать σ.

В следующем определении используются когомологии Чеха, так как в некоторых приложениях нам нужно будет их свойство непрерывности.

Определение. *Когомологическим индексом* Z_2-пространства X называется максимальное n такое, что в $H^*_G(X, Z_2)$ степень $w^n \neq 0$, если такого n не существует, то индекс считаем равным ∞. Обозначим индекс X за $\operatorname{hind} X$.

Очевидно, что индекс несвободного Z_2-пространства равен ∞. Из строения когомологий $\mathbb{R}P^n$ следует, что индекс n-мерной сферы с действием Z_2 $x \mapsto -x$ равен n.

Напомним известную лемму (обобщённая теорема Борсука-Улама):

Лемма 1. *Если существует эквивариантное отображение $f : X \to Y$, то* $\operatorname{hind} X \leq \operatorname{hind} Y$.

Доказательство леммы очевидно следует из определения индекса и естественности класса когомологий w. Это свойство также называется монотонностью индекса.

Введём ещё одну геометрическую конструкцию для Z_2-пространств.

Определение. Для свободного Z_2-пространства X возьмём произведение X на отрезок $I = [0, 1]$ и определим в нем действие Z_2 по формуле $\sigma(x, t) = (\sigma(x), 1 - t)$. Тогда пространство $X \times I$ свободно и пусть $B(X) = (X \times I)/Z_2$. Можно заметить, что $B(x)$ получено из X приклеиванием отрезка к каждой паре точек $\{x, \sigma(x)\}$ и введением соответствующей топологии на этом множестве. Естественное отображение $B(X) \to X/Z_2$, является расслоением со слоем I (а значит и гомотопической эквивалентностью).

Определение. Определим отображение $i_X : X \to B(X)$ по формуле $i_X(x) \mapsto (x, 0)$, оно отождествляет X с пространством сфер расслоения $B(X) \to X/Z_2$. Далее под вложением X в $B(X)$ всегда будет подразумеваться отображение i_X.

Заметим, что пространство $B(X)$ обладает действием Z_2 по формуле $(x, t) \mapsto (\sigma(x), t)$, у этого действия есть множество неподвижных точек $X \times \{1/2\}$.

Следующая теорема усиливает лемму 5.5 из [14].

Теорема 6. *Если у Z_2-пространств X и Y $\operatorname{hind} X = \operatorname{hind} Y = n$, то для любого эквивариантного отображения $f : X \to Y$ отображение $f^* : H^n(Y, Z_2) \to H^n(X, Z_2)$ нетривиально. Кроме того, не существует такого (не эквивариантного, а просто непрерывного) отображения $h : B(X) \to Y$, что $f = h \circ i_X$.*

Доказательство. Из условия следует, что пространства в являются свободными. Запишем точную последовательность Тома

$$\dots \xleftarrow{\delta_X} H^k(X, Z_2) \xleftarrow{i_X^*} H^k(B(X), Z_2) \xleftarrow{\pi_X^*} H^k(B(X), X, Z_2) \xleftarrow{\delta_X} H^{k-1}(X, Z_2) \dots,$$

$$\dots \xleftarrow{\delta_Y} H^k(Y, Z_2) \xleftarrow{i_Y^*} H^k(B(Y), Z_2) \xleftarrow{\pi_Y^*} H^k(B(Y), Y, Z_2) \xleftarrow{\delta_Y} H^{k-1}(Y, Z_2) \dots$$

и заметим, что f порождает естественный гомоморфизм $B(X) \to B(Y)$, значит между этими точными последовательностями есть гомоморфизм f^*, перестановочный с гомоморфизмами последовательностей. Пусть фундаментальные классы Тома в $H^1(B(X), X, Z_2)$ и $H^1(B(Y), Y, Z_2)$ — это u_X и u_Y, а образы $w \in H^*_G(\mathrm{pt}, Z_2)$ в $H^*(B(X), Z_2)$ и $H^*(B(Y), Z_2)$ — это w_X и w_Y, при этом $f^*(u_Y) = u_X, f^*(w_Y) = w_X$. Тогда по определению индекса $\pi_Y^*(u_X w_X^n) = w_X^{n+1} = 0$ и $\pi_X^*(u_Y w_Y^n) = w_Y^{n+1} = 0$, значит есть класс $v \in H^n(Y, Z_2)$, для которого $\delta_Y(v) = u_Y w_Y^n$. При этом $\delta_X(f^*(v)) = f^*(\delta_Y(v)) = u_X w_X^n \neq 0$, а значит $f^*(v) \neq 0$, таким образом первая часть теоремы доказана.

Чтобы доказать вторую часть теоремы, заметим, что если найдётся искомое h, то $f^*(v) \in \operatorname{Im} i_X^*$ и из точности последовательности Тома $\delta_X(f^*(v)) = 0$, что противоречит предыдущему абзацу. $\square$

Теперь сформулируем следствие из теоремы 6 о покрытиях Z_2-пространства. Сначала введём определение.

Определение. Точки x и $\sigma(x)$ некоторого Z_2-пространства X назовём *антиподальными.*

Термин "антиподальный" уже использовался для пар точек на границе выпуклого компакта. Тем не менее, далее из контекста всегда понятно, в каком смысле это слово употребляется.

Теорема 7. *Пусть компактное метрическое Z_2-пространство X с $\operatorname{hind} X = n$ покрыто семейством замкнутых множеств $\mathcal{F} = \{U_1, U_2, \dots, U_{n+2}\}$. Пусть никакое U_i не содержит антиподальных точек. Тогда для всякого разбиения семейства $\{U_i\}$ на два непустых семейства $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ найдётся точка $x \in X$ такая, что $x \in \bigcap \mathcal{F}_1$ и $\sigma(x) \in \bigcap \mathcal{F}_2$. Кроме того, если покрытие $\mathcal{F}$ индуцировано из некоторого замкнутого покрытия $\mathcal{G} = \{V_1, V_2, \dots, V_{n+2}\}$ пространства $B(X)$, то семейство $\mathcal{G}$ имеет общую точку.*

Доказательство. Для подмножества W некоторого метрического пространства M положим

$$W(\varepsilon) = \{x \in M : \operatorname{dist}(x, W) \leq \varepsilon\}.$$

Из соображений компактности можно считать, что

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall i = 1, \dots, n+2 \ \operatorname{dist}(U_i, \sigma(U_i)) > 2\varepsilon.$$

Тогда для каждого $i = 1, \dots, n+2$ возьмём функцию f_i, которая обращается в 1 на U_i и обращается в 0 за пределами $U_i(\varepsilon)$. Далее нормируем эти функции, чтобы их сумма была равна 1.

Возьмём теперь функции $g_i(x) = f_i(x) - f_i(\sigma(x))$. Вместе функции g_i дают эквивариантное отображение $g : X \to \mathbb{R}^{n+2}$, причём образ отображения лежит в гиперплоскости H с уравнением $y_1 + \ldots + y_{n+2} = 0$ и не содержит начало координат. Тогда рассмотрим отображение $h : X \to S^n$, в единичную сферу гиперплоскости H, заданное формулой $h(x) = g(x)/|g(x)|$.

Отображение $h : X \to S^n$ эквивариантно и по теореме 6 отображение $h^* : H^n(S^n, Z_2) \to H^n(X, Z_2)$ нетривиально, отсюда следует, что h сюръективно.

Возьмём разбиение $\{1, 2, \dots, n+2\} = I_1 \cup I_2$ и соответствующее ему разбиение $\{U_i(\varepsilon)\}_{i=1}^{n+2} = \mathcal{F}_1(\varepsilon) \cup \mathcal{F}_2(\varepsilon)$. Возьмём $c = \sqrt{|I_1||I_2|(n+2)}$ и точку $y \in S^n$ так, что её координаты равны

$$y_i = \frac{|I_2|}{c} \ i \in I_1 \quad y_i = -\frac{|I_1|}{c} \ i \in I_2.$$

Найдётся $x \in X$ такая, что $y = h(x)$, поэтому $x \in \bigcap \mathcal{F}_1(\varepsilon)$, $\sigma(x) \in \bigcap \mathcal{F}_2(\varepsilon)$. Отсюда при стремлении ε к нулю из соображений компактности следует первая часть теоремы.

Пусть теперь покрытие продолжено до покрытия $B(X)$, тогда функции f_i соответственно продолжаются на $B(X)$ так, что их сумму можно считать единичной. То есть f можно считать отображением из X в гиперплоскость H_1, заданную условием $y_1 + \ldots + y_{n+2} = 1$. Если образ f содержит точку $(\frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+2})$, то, аналогично первой части теоремы, мы доказываем, что множества $\{V_i\}$ имеют общую точку.

Иначе из f можно получить отображение $h_1 : B(X) \to S^n$ в единичную сферу плоскости H_1. Покажем, что отображения h и $h_1|X$ гомотопны. Действительно, для $t \in [0, 1]$ можно положить

$$g_t(x) = f(x) - (1-t)f(\sigma(x)) \quad h_t(x) = \frac{g_t(x) - t(\frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+2})}{|g_t(x) - t(\frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+2})|},$$

тогда h_t — искомая гомотопия. По второй части теоремы 6 h (а значит и гомотопное ему h_1) нельзя продолжить с X на $B(X)$ — противоречие. $\square$

Докажем ещё одну теорему о покрытиях:

Теорема 8. *Пусть компактное метрическое Z_2-пространство X с $\operatorname{hind} X = n$ покрыто семейством замкнутых множеств $\mathcal{F} = \{U_1, U_2, \dots, U_N\}$. Пусть никакое U_i не содержит антиподальных точек. Тогда найдётся точка $x \in X$ такая, что количество множеств U_i, содержащих x или $\sigma(x)$ не менее $n+2$.*

Доказательство. Как и в предыдущей теореме заменим покрытие на набор функций $f_i : X \to \mathbb{R}^+$. Рассмотрим отображение $g(x) = f(x) - f(\sigma(x))$ и предположим противное. Это означает, что для любого $x \in X$ не более $n+1$ координаты $g(x)$ отлично от нуля.

Тогда с учётом условий, что сумма положительных координат $g(x)$ равна 1, а сумма отрицательных равна -1, g даёт эквивариантное отображение X в некоторый $n-1$-мерный симплициальный комплекс. Индекс $n-1$-мерного комплекса со свободным Z_2-действием по определению не превосходит $n-1$, значит получаем противоречие с леммой 1. $\square$

Сформулируем ещё одну теорему, уточняющую теорему Люстерника-Шнирельмана о категории проективного пространства $\mathbb{R}P^n$.

Определение. Инвариантное подмножество $U \subseteq X$ Z_2-пространства X назовём *несущественным*, если $\operatorname{hind} U = 0$.

Заметим, что индекс Z_2-пространства равен нулю (при использовании когомологий Чеха) тогда и только тогда, когда существует эквивариантное отображение этого пространства в нульмерную сферу.

Теорема 9. *Пусть компактное метрическое Z_2-пространство X с $\operatorname{hind} X = n$ покрыто семейством замкнутых несущественных инвариантных множеств*

$$\mathcal{F} = \{U_1, U_2, \dots, U_N\}.$$

Тогда $N \geq n+1$ и некоторые $n+1$ множеств из семейства $\mathcal{F}$ имеют общую точку.

Доказательство. Для каждого U_i у нас есть Z_2-эквивариантное отображение $f_i : U_i \to \{-1, +1\}$. Продолжим f_i эквивариантно на X так, чтобы оно было отлично от нуля только в ε-окрестности U_i. В итоге все функции задают эквивариантное отображение $f : X \to \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, и можно определить эквивариантное отображение $h : X \to S^{N-1}$ по формуле $h(x) = f(x)/|f(x)|$. По лемме 1 $n \leq N-1$, таким образом первое утверждение доказано.

Чтобы доказать второе утверждение, предположим противное: для достаточно малого ε это будет означать, что не более n координат любой точки $h(x)$ ненулевые. Тогда образ h содержится в некотором $n-1$-мерном подмножестве S^{N-1}, что противоречит лемме 1. $\square$

Сформулируем также аналог теоремы 7 для произведения пространств (см. также Теорему 2 из [15]).

Теорема 10. *Пусть компактные метрические Z_2-пространства X и Y имеют индексы $\operatorname{hind} X = n$, $\operatorname{hind} Y = m$, $m \geq n$.*

Пусть $B(X)\times B(Y)$ покрыто семейством замкнутых множеств $\mathcal{F} = \{V_{ij}\}_{i\in[n+2], j\in[m+2]}$. Обозначим проекции $\pi_X : B(X) \times B(Y) \to B(X)$, $\pi_Y B(X) \times B(Y) \to B(Y)$.

Пусть для любого $i \in [n+2]$ $\pi_X(\bigcup_{j\in[m+2]} V_{ij}) \cap X$ не содержит антиподальных точек и для любого $j \in [m+2]$ $\pi_Y(\bigcup_{i\in[n+2]} V_{ij}) \cap Y$ также не содержит антиподальных точек.

Пусть $\{a_i\}_{i\in[n+2]}$ — положительные целые числа, сумма которых равна $m + 2$. Тогда найдётся такое отображение $\sigma : [m + 2] \to [n + 2]$, что

$$\forall i \in [n + 2]\ |\sigma^{-1}(i)| = a_i \quad \text{и} \quad \bigcap_{j\in[m+2]} U_{\sigma(j)j} \neq \emptyset.$$

Для доказательства этой теоремы понадобится обобщённая лемма Холла [16] о паросочетаниях.

Лемма 2. *Пусть в двудольном графе множеством вершин разбито на $V \cup W$, где $|V| = n$, $|W| = m$ $(m \geq n)$, и дано отображение $a : V \mapsto \mathbb{N}$, где $\sum_{v\in V} a(v) = m$. Пусть для любого непустого $V' \subseteq V$ множество вершин из W, соединённых хоть с одной вершиной из V' имеет мощность не менее $\sum_{v\in V'} a(v)$. Тогда найдётся отображение $\sigma : W \mapsto V$ такое, что $\forall w \in W$ $(w, \sigma(w))$ является ребром и $\forall v \in V$ $|\sigma^{-1}(v)| = a(v)$.*

Лемма является следствием обычной леммы Холла, если каждую вершину $v \in V$ превратить в $a(v)$ ее клонов.

Доказательство теоремы 10. Аналогично доказательству теоремы 7, перейдём от покрытий к функциям $\phi_{ij} : B(X) \times B(Y) \to \mathbb{R}^+$ с единичной суммой.

Рассмотрим функции $f_i = \sum_{j\in[m+2]} \phi_{ij}$ и $g_j = \sum_{i\in[n+2]} \phi_{ij}$. Как и в доказательстве теоремы 7, отображения f и g можно считать отображениями $B(X) \times B(Y)$ в $n + 1$ и $m + 1$-мерные симплексы соответственно, и если обозначить отображения

$$i_X : B(X) \to B(X) \times B(Y) \quad i_X(x) = x \times y_0$$

и

$$i_Y : B(Y) \to B(X) \times B(Y) \quad i_Y(y) = x_0 \times y,$$

то из доказательства леммы 6 следует, что отображения

$$i_X^* \circ f^* : H^{n+1}(\Delta^{n+1}, \partial\Delta^{n+1}, Z_2) \to H^{n+1}(B(X), X, Z_2))$$

и

$$i_Y^* \circ g^* : H^{m+1}(\Delta^{m+1}, \partial\Delta^{m+1}, Z_2) \to H^{m+1}(B(Y), Y, Z_2))$$

нетривиальны, а значит, по формуле Кюннета, нетривиально и отображение

$$(f \times g)^* : H^{n+m+2}(\Delta^{n+1} \times \Delta^{m+1}, \partial\left(\Delta^{n+1} \times \Delta^{m+1}\right), Z_2) \to$$
$$\to H^{n+m+2}(B(X) \times B(Y), X \times B(Y) \cup B(X) \times Y, Z_2).$$

Аналогично доказательству теоремы 7 отсюда следует, что $f \times g$ сюръективно. Рассмотрим тогда прообраз точки

$$\left(\frac{a_1}{m+2}, \dots, \frac{a_{n+2}}{m+2}\right) \times \left(\frac{1}{m+2}, \dots, \frac{1}{m+2}\right) \in \Delta^{n+1} \times \Delta^{m+1},$$

пусть это точка p. Для матрицы $\{\phi_{ij}(p)\}$ выполняются условия теоремы Холла, что, аналогично [17], даёт нам искомое отображение σ. $\square$

4. Геометрия и топология пространства k-плоскостей

Рассмотрим пространство всех k-плоскостей в $\mathbb{R}^n$. Каждой такой плоскости α можно сопоставить единственное ортогональное ей $(n-k)$-мерное линейное подпространство $g(\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ и единственную точку пересечения $\alpha \cap g(\alpha)$. Таким образом пространство k-мерных аффинных плоскостей отождествляется с пространством γ_n^{n-k} канонического расслоения над грассманианом G_n^{n-k}. В дальнейшем мы будем считать пространство плоскостей наделённым топологией γ_n^{n-k}.

В векторном расслоении действует Z_2 отображением $x \mapsto -x$ в каждом слое. Рассмотрим пространство сфер $S(\gamma_n^{n-k})$ и вычислим его индекс.

Теорема 11. $\operatorname{hind} S(\gamma_n^{n-k}) = n - 1$.

Доказательство. Пространство $S(\gamma_n^{n-k})$ можно представить как пространство пар (n, L), где n — единичный вектор, а L — ортогональное ему k-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$. Отсюда видно, что существует эквивариантное отображение $S(\gamma_n^{n-k})$ в $(n-1)$-мерную сферу и $\operatorname{hind} S(\gamma_n^{n-k}) \le n - 1$.

Когомологии $H_G^*(S(\gamma_n^{n-k}), Z_2)$ вычислим как когомологии пространства $G_n^{1,k} = S(\gamma_n^{n-k})/Z_2$, которое можно отождествить с пространством пар (l, L), где l — одномерное подпространство $\mathbb{R}^n$, а L — ортогональное ему k-мерное подпространство.

Сопоставление $\pi : (l, L) \mapsto l$ проецирует $G_n^{1,k}$ на $\mathbb{R}P^{n-1}$, при этом легко видеть, что одномерная образующая w когомологий $H^*(\mathbb{R}P^{n-1}, Z_2)$ как раз и даст при отображении π^* элемент $w \in H^*(G_n^{1,k}, Z_2)$, для которого мы должны доказать $w^{n-1} \neq 0$. При проекции π пространство $G_n^{1,k}$ отождествляется с пространством k-мерных подпространств в слоях дополнительного к каноническому векторного расслоения $\eta \to \mathbb{R}P^{n-1}$.

Заметим, что пространство флагов $F(\eta)$ расслоения η отождествляется с пространством флагов $F(\mathbb{R}^n)$, при этом естественная проекция $\pi_F : F(\eta) \to \mathbb{R}P^{n-1}$ отображает флаг

$$0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = \mathbb{R}^n$$

в прямую L_1, рассматриваемую как элемент $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Определим отображение пространства флагов $\rho : F(\eta) \to G_n^{1,k}$, которое отображает флаг $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n$ в пару из одномерного пространства L_1 и ортогонального дополнения к L_1 в L_{k+1}. Очевидно $\pi_F = \pi \circ \rho$. Известно, что соответствующее отображение π_F^* когомологий с коэффициентами Z_2 инъективно. Значит и отображение Z_2-когомологий π^* инъективно и $w^{n-1} \neq 0$ в когомологиях $G_n^{1,k}$. $\square$

Также в обозначениях предыдущего раздела можно сформулировать лемму.

Лемма 3. *Существует отображение $B(S(\gamma_n^{n-k}))$ в пространство шаров расслоения $B(\gamma_n^{n-k})$, тождественное на $S(\gamma_n^{n-k})$.*

Доказательство. Если пара (s,t) представляет элемент $B(S(\gamma_n^{n-k}))$, то отобразим ее в $(1-t)s-ts \in B(\gamma_n^{n-k})$, заметим, что пара $(-s, 1-t)$ перейдёт в ту же точку и таким образом задаётся отображение $B(S(\gamma_n^{n-k})) \to B(\gamma_n^{n-k})$. □

Из утверждений этого и предыдущего раздела можно вывести следующую теорему.

Теорема 12. *Пусть $S(\gamma_n^{n-k})$ покрыто семейством замкнутых множеств $\mathcal{F} = \{U_1, U_2, \dots, U_{n+1}\}$. Пусть никакое U_i не содержит антиподальных точек. Тогда для всякого разбиения семейства $\{U_i\}$ на два непустых семейства $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ найдётся точка $c \in S(\gamma_n^{n-k})$ такая, что $c \in \bigcap \mathcal{F}_1$ и $\sigma(c) \in \bigcap \mathcal{F}_2$. Кроме того, если покрытие $\mathcal{F}$ индуцировано из некоторого замкнутого покрытия $\mathcal{G} = \{V_1, V_2, \dots, V_{n+1}\}$ пространства $B(\gamma_n^{n-k})$, то семейство $\mathcal{G}$ имеет общую точку.*

Доказательство. Первая часть тривиально следует из теорем 7 и 11, для доказательства второй части надо применить лемму 3 и из покрытия $B(\gamma_n^{n-k})$ получить покрытие $B(S(\gamma_n^{n-k}))$. □

Рассмотрим также ориентированный грассманиан G_n^{k+}. На нем Z_2 действует сменой ориентации. Заметим, что $G_n^{k+} \sim G_n^{n-k+}$, поэтому для вычисления Z_2-индекса ориентированного грассманиана достаточно рассмотреть случай $2k \leq n$. Следующая теорема суммирует сведения об индексе ориентированного грассманиана из работ [18, 19].

Теорема 13. *Пусть $2k \leq n$ и 2^s — минимальная степень двойки $2^s \geq n$.*

1) Если $k = 1$, то $\operatorname{hind} G_n^{1+} = \operatorname{hind} S^{n-1} = n-1$;

2) Если $k = 2$, то $\operatorname{hind} G_n^{k+} = 2^s - 2$;

3) Если $k > 2$, то при $n = 2k = 2^s$ $2^{s-1} \leq \operatorname{hind} G_n^{k+} \leq 2^s - 1$, в остальных случаях $2^s - 2 \leq \operatorname{hind} G_n^{k+} \leq 2^s - 1$.

Во всех случаях $\operatorname{hind} G_n^{k+} \geq n-k$ и равенство достигается только при $k = 1$ или $k = 2$ и $n = 2^s$.

5. Доказательства теорем о каноническом расслоении

Доказательство теоремы 1. Можно выбрать такие размеры шара в каждом слое расслоения γ_n^1, что все наши множества будут лежать в пространстве шаров $B(\gamma_n^1)$.

Теперь определим подмножества U_i пространства сфер следующим образом. Возьмём некоторую точку $s \in S(\gamma_n^1)$, лежащую в слое L. На каждом отрезке $V_i \cap L$ выберем самую дальнюю от s точку $f_i(s)$. Эти точки очевидно зависят от s непрерывно. Теперь обозначим ближайшую к s из этих точек за $f(s)$, эта функция также непрерывно зависит от s. Тогда положим

$$U_i = \{s \in S(\gamma_n^1) : f(s) = f_i(s)\}.$$

Эти множества замкнуты. Если какое-то U_i содержит пару антиподальных точек $s, s' \in S(\gamma_n^1)$, то отрезок $V_i \cap L$ удовлетворяет первой альтернативе теоремы.

Иначе применим теорему 12. Для всякого разбиения множества индексов $\{1, 2, \dots, n+1\} = I_1 \cup I_2$ найдётся такая пара антиподальных точек $s, s' \in S(\gamma_n^1)$, что

$$s \in \cap_{i\in I_1} U_i, \quad s' \in \cap_{i\in I_2} U_i.$$

Рассмотрим семейства отрезков $\mathcal{A} = \{V_i \cap L\}_{i\in I_1}$ и $\mathcal{B} = \{V_i \cap L\}_{i\in I_2}$ и будем считать, что s лежит левее s'. Тогда все правые концы $\mathcal{A}$ совпадают с точкой a, все левые концы $\mathcal{B}$ совпадают с точкой b и либо a левее b, либо все отрезки обоих семейств содержат $[ba]$. То есть семейства отрезков выравнены. □

Доказательство теоремы 3. Обозначим

$$U_i = \{x \in \gamma_n^k : x \text{ лежит в слое } L,\ \operatorname{dist}(x, V_i \cap L) = \min_{j=1,\dots,n+1} \operatorname{dist}(x, V_j \cap L)\}.$$

Из непрерывной зависимости $V_i \cap L$ от слоя следует замкнутость множеств U_i. Будем рассматривать сферы радиуса R в расслоении γ_n^k, обозначим расслоение сфер $S(\gamma_n^k)$. Покажем, что для достаточно большого R множества $U_i \cap S(\gamma_n^k)$ не содержат антиподальных точек.

Предположим противное, тогда можно считать, множество $U_i \cap S(\gamma_n^k)$ содержит пару антиподальных точек $R_m x_m$ и $-R_m x_m$ для некоторой последовательности радиусов $R_m \to +\infty$. Это значит, что ближайшие к $R_m x_m$ и $-R_m x_m$ точки объединения $\bigcup V_i$ принадлежат одному и тому же V_i, обозначим эти точки y_m и z_m. Из соображений компактности можно считать, что точки x_m, y_m, z_m стремятся к некоторым точкам x, y, z в слое L. Тогда получим, что семейство множеств $\{V_i \cap L\}$ имеет на границе своей выпуклой оболочки пару точек y, z, принадлежащую одному и тому же V_i, кроме того, рассматривая пределы соответствующих сфер с центрами $R_m x_m, -R_m x_m$ и радиусами $|R_m x_m - y_m|, |-R_m x_m - z_m|$, которые являются полупространствами, получим противоречие с неантиподальностью семейства $\{V_i \cap L\}$. Значит, для достаточно некоторого R множества $U_i \cap S(\gamma_n^k)$ не содержат антиподальных точек.

Применяя теорему 12 находим общую точку семейства $\{U_i\}$, что в точности даёт утверждение теоремы. □

Доказательство теоремы 4. Применим теорему 3 и найдём точку $x \in L$, находящуюся на равных расстояниях от всех $V_i \cap L$.

Предположим, что это расстояние положительно. Обозначим множество ближайших к x точек $\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i \cap L$ через K. Очевидно, K пересекается со всеми V_i, кроме того, оно выпукло, следовательно оно содержится в некотором опорном к $\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i \cap L$ полупространстве H. Но тогда противоположное к H опорное полупространство не может содержать точек никакого из множеств V_i из неантиподальности семейства $\{V_i \cap L\}$, то есть не может быть опорным к $\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i \cap L$. □

Доказательство теоремы 5. Рассмотрим пространство $S(\gamma_n^k)$ и определим в нем замкнутые подмножества

$$U_i = \{(n, L) : L \in G_n^k,\ n \in S(L),\ (n, s_i(L)) = \max_{j\in[m]}(n, s_j(L))\}.$$

Из непустоты внутренности $P(L)$ следует неантиподальность этих подмножеств. Теперь применим теоремы 11 и 8 и получим в точности утверждение данной теоремы. $\square$

6. Разбиение мер гиперплоскостями

Сначала сформулируем обобщение известной теоремы (см. [10, 5, 11]) о том, что всякие $n+1$ выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$ либо могут быть пересечены гиперплоскостью; либо каждые два непересекающихся подсемейства этого семейства отделимы гиперплоскостью. Сделаем несколько определений. Основные сведения о мерах можно найти в книге [20].

Определение. Меру μ на $\mathbb{R}^n$ назовём *вероятностной*, если $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$.

Будем рассматривать такие меры, для которых мера полупространства непрерывно зависит от полупространства, кратко будем называть такие меры непрерывными. Для непрерывности меры в вышеуказанном смысле, достаточно, чтобы мера была абсолютно непрерывной.

Определение. Пару из непрерывной вероятностной меры с компактным носителем μ и числа $\varepsilon \in [0, 1/2)$ будем называть *мерой с допуском.* Для краткости при рассмотрении нескольких мер μ_i допуск каждой будем обозначать $\varepsilon(\mu_i)$.

Определение. Пусть в $\mathbb{R}^n$ дана мера с допуском μ. Будем говорить, что гиперплоскость h *пересекает (с допуском)* меру μ, если h делит $\mathbb{R}^n$ на два полупространства H_1 и H_2 и

$$\mu(H_1), \mu(H_2) \geq \varepsilon(\mu).$$

Определение. Пусть в $\mathbb{R}^n$ дана мера с допуском μ. Будем говорить, что полупространство H *содержит (с допуском)* меру μ, если

$$\mu(H) > 1 - \varepsilon(\mu).$$

Определение. Пусть в $\mathbb{R}^n$ даны два семейства мер с допусками $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Будем говорить, что гиперплоскость h *разделяет (с допуском)* семейства $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, если h делит $\mathbb{R}^n$ на два полупространства H_1 и H_2, для любой $\mu \in \mathcal{M}_1$ полупространство H_1 содержит с допуском μ и для любой $\mu \in \mathcal{M}_2$ полупространство H_2 содержит с допуском μ.

Из следствия 2 выведем такое утверждение.

Следствие 14. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ дано семейство из $n+1$ меры с допуском $\mathcal{M}$. Тогда либо найдётся гиперплоскость, которая пересекает с допуском все меры $\mathcal{M}$; или для всякого разбиения $\mathcal{M}$ на два непустых семейства $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ найдётся гиперплоскость, которая разделяет с допуском $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$.*

Доказательство. Если $\mathcal{M} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}\}$, то обозначим за V_i множество гиперплоскостей, пересекающих с допуском μ_i. Применяя к этим множествам следствие 2, получаем требуемое утверждение. $\square$

Докажем ещё одну теорему, обобщающую результат работы [21].

Определение. Рассмотрим семейство из n мер с допуском $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Обозначим за $X \subseteq \gamma_n^1$ множество гиперплоскостей, пересекающих с допуском все эти меры и рассмотрим естественную проекцию $p : X \to G_n^1$. Будем говорить, что семейство мер с допуском $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ *плоское*, если отображение p пропускается через отображение универсального накрытия $\pi : S^{n-1} \to G_n^1$, то есть $p = \pi \circ \tilde{p}$.

Теорема 15. *Рассмотрим плоское семейство мер с допуском $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и числа $\{\alpha_i\}$ такие, что либо $\alpha_i = \varepsilon(\mu_i)$, либо $\alpha_i = 1 - \varepsilon(\mu_i)$. В таком случае существует полупространство $H \subset \mathbb{R}^n$ такое, что для всех $i = 1, \dots, n$*

$$\mu_i(H) = \alpha_i.$$

Условие на отображение p здесь обобщает условие отделимости носителей мер из Теоремы 1 работы [21], так как семейство мер, носители которых отделимы, является плоским при любых допусках. В формулировке участвуют допуски, не равные $1/2$, но предельным переходом можно убедиться, что для допусков, некоторые из которых равны $1/2$ она тоже верна. Если все допуски равны $1/2$, мы получаем "теорему о бутерброде".

Доказательство. Обозначим за V_i множество гиперплоскостей, пересекающих с допуском меру μ_i. Дальше будем действовать аналогично доказательству теоремы 1.

Рассмотрим пространство достаточно больших шаров $B(\gamma_n^1)$, содержащее все V_i и определим отображения $f_i : S(\gamma_n^1) \to B(\gamma_n^1)$ $(i = 1, \dots, n)$ и $f : S(\gamma_n^1) \to B(\gamma_n^1)$ как в доказательстве теоремы 1. Теперь определим замкнутые подмножества $U_0, U_1, \dots, U_n \subseteq S(\gamma_n^1)$.

Возьмём проекцию множества X на G_n^1 и обозначим ее Y. Определим множество $Z = p^{-1}(Y) \cap S(\gamma_n^1)$. Множество Z является двукратным накрытием Y и по условию на отображение p накрытие $Z \to Y$ тривиально, то есть $Z = Z_1 \cup Z_2$, причём $p : Z_1 \to Y$ и $p : Z_2 \to Y$ — биекции.

Положим теперь $U_0 = Z_1$, и

$$U_i = \{s \in S(\gamma_n^1) \setminus \operatorname{int} U_0 : f(s) = f_i(s)\}.$$

Множество U_0 не содержит антиподальных точек по построению. Предположим, что U_i содержит антиподальные точки $s, s' \in S(\gamma_n^1)$ в слое L. Тогда пересечение $V_i \cap L$ содержится во всех пересечениях $V_j \cap L$. Заметим, что длина $V_i \cap L$ больше нуля, так как $\varepsilon(\mu_i) < 1/2$. Тогда $p(s) = p(s') \in \operatorname{int} Y$, то есть одна из точек s, s' лежит внутри U_0 — противоречие.

Теперь положим $I = \{0, 1, \dots, n\}$,

$$I_1 = \{i = 1, \dots, n : \alpha_i = 1 - \varepsilon(\mu_i)\}$$

и $I_2 = I \setminus I_1$. Применив теорему 12 видим, что найдётся пара антиподальных точек $s, s' \in S(\gamma_n^1)$, для которых

$$\forall i \in I_1\ f(s) = f_i(s), \quad \forall i \in I_2 \setminus \{0\}\ f(s') = f_i(s'), \quad s' \in \operatorname{bd} U_0.$$

Значит, отрезки $V_i \cap L$ пересекаются по одной точке, которая является правой для $i \in I_1$ и левой для $i \in I_2 \setminus \{0\}$. Легко видеть, что эта точка определяет соответствующее полупространство, требуемое в условии. $\square$

7. Теоремы типа Борсука-Улама для плоскостей

Сделаем определения и выведем следствие из теорем 3 и 4.

Определение. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *l-выпуклым*, если его проекция на любое l-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$ выпукла.

Следствие 16. *Если в $\mathbb{R}^n$ дано неантиподальное семейство компактов $\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}| = n+1$, то найдётся k-плоскость, находящаяся от всех множеств семейства на равном расстоянии. Если, кроме того, объединение $\bigcup \mathcal{F}$ $(n-k)$-выпукло, то у $\mathcal{F}$ существует k-трансверсаль.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = \{K_i\}_{i=1}^{n+1}$. Обозначим за V_i множество k-плоскостей, пересекающих K_i. Тогда пересечения $V_i \cap L$ — это просто проекции K_i на L, следовательно они образуют неантиподальное семейство. Применив к V_i теоремы 3 или 4, получим требуемое. $\square$

Определение. Пусть даны два множества $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$. *Уклонением* X от Y называется величина

$$\delta(X, Y) = \sup_{x \in X} \operatorname{dist}(x, Y).$$

Следствие 17. *Если в $\mathbb{R}^n$ дано неантиподальное семейство компактов $\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}| = n+1$, то найдётся такая k-плоскость M, что уклонения всех множеств семейства $\mathcal{F}$ от M одинаковы.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = \{K_i\}_{i=1}^{n+1}$. Обозначим

$$V_i = \{M \in \gamma_n^{n-k} : \delta(\bigcup \mathcal{F}, M) = \delta(K_i, M)\}.$$

Тогда аналогично доказательству теоремы 3 можно заметить, что при достаточно большом радиусе шара в расслоении шаров $B(\gamma_n^{n-k})$, никакое V_i не содержит антиподальных точек в соответствующем расслоении сфер $S(\gamma_n^{n-k})$. Отсюда следует существование непустого пересечения $\bigcap_{i=1}^{n+1} V_i$, что и требовалось доказать. $\square$

Заметим, что в следствиях 16 и 17 расстояние можно брать в любой норме с гладким единичным шаром.

Из того, что $\operatorname{hind} S(\gamma_n^k) = n - 1$ можно вывести ещё одно обобщение теоремы Борсука-Улама. Сначала сделаем пару определений.

Определение. Для единичной сферы $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ назовём *k-подсферой* всякое пересечение k-мерного линейного подпространства $L \subseteq \mathbb{R}^n$ с S^{n-1}.

Определение. Для единичной сферы $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ назовём *k-полусферой* половину некоторой k-подсферы.

Теорема 18. *Пусть на сфере S^{n-1} даны n открытых подмножеств $V_1, \dots, V_n$, причём всякое V_i пересекает всякую k-подсферу. Тогда найдётся k-полусфера, пересекающая все множества V_i.*

Доказательство. Множество k-подсфер параметризуется грассманианом G_n^k, а множество k-полусфер параметризуется полупространствами в слоях γ_n^k, границы которых содержат начало координат, то есть оно параметризуется $S(\gamma_n^k)$.

Обозначим за U_i множество k-полусфер, не пересекающих V_i. Это множество компактно и из условия теоремы следует, что оно не содержит антиподальных точек. Так как по теореме 11 $\operatorname{hind} S(\gamma_n^k) = n-1$, то по обобщённой теореме Борсука-Улама множества U_i не могут покрыть $S(\gamma_n^k)$, из чего следует утверждение теоремы. $\square$

Теорема 19. *Пусть на сфере S^{n-1} даны $n+1$ открытых подмножеств $V_1, \dots, V_{n+1}$, причём всякое V_i пересекает всякую k-подсферу. Тогда либо найдётся k-полусфера, пересекающая все множества V_i; либо для всякого разбиения $[n+1] = I_1 \cap I_2$ найдётся пара k-полусфер H_1 и H_2, являющихся дополнительными половинками одной k-подсферы, такая что $V_i \cap H_1 = \emptyset$ для любого $i \in I_1$ и $V_i \cap H_2 = \emptyset$ для любого $i \in I_2$.*

Доказательство. Как и в предыдущей теореме обозначим за U_i множество k-полусфер, не пересекающих V_i. Теперь утверждение теоремы следует из теорем 7 и 11. $\square$

8. Теоремы типа Хелли для общих трансверсалей

Приведём несколько теорем, близких к теореме Хорна-Кли и её обобщениям из [22]. В личных беседах В.Л. Дольниковым были сообщены автору и другие, пока не опубликованные, аналогичные результаты.

Теорема 20. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ даны $n+1$ семейство 1-выпуклых компактов $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in[n+1]}$. Пусть в каждом семействе любые два компакта пересекаются.*

Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:

1) семейство $\bigcup_{i\in[n+1]} \mathcal{F}_i$ имеет $n-1$-трансверсаль;

2) для всякого разбиения множества индексов $[n+1]$ на два множества I_1 и I_2 найдётся такая гиперплоскость h и набор представителей $C_i \in \mathcal{F}_i$ ($i \in [n+1]$), что множества $\{C_i\}_{i\in I_1}$ лежат с одной стороны от h, а $\{C_i\}_{i\in I_2}$ лежат с другой стороны от неё.

Доказательство. Обозначим для всякой прямой $l \in G_n^1$ за π_l ортогональную проекцию на эту прямую и обозначим

$$V_i(l) = \bigcap_{C\in\mathcal{F}_i} \pi_l(C).$$

Эти множества непусты, так как в каждом семействе отрезков $\{\pi_l(C)\}_{C\in\mathcal{F}_i}$ любые два пересекаются. Также ясно, что они непрерывно зависят от l. Обозначим $V_i = \bigcup_{l\in G_n^1} V_i(l)$.

Применим к $\{V_i\}$ следствие 2. Тогда первая альтернатива следствия 2 в точности соответствует первой альтернативе данной теоремы.

Иначе для всякого разбиения $[n+1] = I_1 \cup I_2$ будем иметь гиперплоскость h, разделяющую $\{V_i\}_{i\in I_1}$ и $\{V_i\}_{i\in I_2}$. Рассмотрим проекции на прямую $l \perp h$, введём на ней направления "слева" и "справа". Тогда можно считать, что на l $\{V_i\}_{i\in I_1}$ лежат слева от $\pi_l(h)$, а $\{V_i\}_{i\in I_2}$ лежат справа от $\pi_l(h)$. Тогда каждый правый конец V_i $(i \in I_1)$ является правым концом некоторого $\pi_l(C_i)$ $(C_i \in \mathcal{F}_i)$ и каждый левый конец V_i $(i \in I_2)$ является левым концом некоторого $\pi_l(C_i)$ $(C_i \in \mathcal{F}_i)$. Тогда $\{C_i\}_{i\in[n+1]}$ дают искомую систему представителей для разбиения $[n+1] = I_1 \cup I_2$. □

Теорема 21. *Пусть $0 < k < n$ и в $\mathbb{R}^n$ дано $n-k+1$ семейство $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in[n-k+1]}$ выпуклых компактов. Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:*

1) Найдётся система представителей $K_i \in \mathcal{F}_i$, такая что $\bigcap_{i\in[n-k+1]} K_i = \emptyset$;

2) В некотором из семейств $\mathcal{F}_i$ любые $k+1$ или менее множеств имеют $k-1$-трансверсаль;

3) Найдётся семейство параллельных k-плоскостей $\{\alpha_i\}_{i\in[n-k+1]}$, такое что для всех $i \in [n-k+1]$ α_i является k-трансверсалью $\mathcal{F}_i$.

Причём третья альтернатива возможна только если $2k \le n$, $k = 1$ или $k = 2$ и $n = 2^l$.

Доказательство. Предположим, что первая альтернатива не выполняется. Тогда возьмём любое $L \in G_n^{n-k}$ и спроецируем на него всю нашу систему множеств. По цветной теореме Хелли некоторое семейство $\pi_L(\mathcal{F}_i)$ имеет общую точку, такой точке соответствует некоторая перпендикулярная L k-трансверсаль для $\mathcal{F}_i$. Обозначим

$$U_i = \{L \in G_n^{k^+} : \bigcap \pi_L(\mathcal{F}_i) \neq \emptyset\}.$$

Пусть условие (2) не выполнено. Тогда возьмём соответствующий набор множеств без $k-1$-трансверсали (их должно быть ровно $k+1$) $K_1, K_2, \dots, K_{k+1} \in \mathcal{F}_i$. Для всякой $L \in U_i$ можно взять соответствующую L k-трансверсаль α для $\mathcal{F}_i$ и сравнить ориентацию на α, задаваемую любым набором точек $x_i \in K_i \cap \alpha$ $(i \in [k+1])$ с ориентацией α, соответствующей ориентации L. По отрицанию условия (2) все такие наборы $(x_1, \dots, x_{k+1})$ задают одну и ту же ориентацию, так как они не лежат ни в какой $k-1$-плоскости. Если ориентации совпали, припишем L знак $+$, иначе припишем $-$.

Таким образом показано, что при невыполнении условия (2) все множества U_i несущественны, теперь по теореме 13 и теореме 9 все U_i должны иметь общую точку, что равносильно условию (3). По теореме 13 такое возможно только при $k = 1$ или при $k = 2$ и $n = 2^l$. □

В случае, когда количество семейств невелико по сравнению с n, утверждение теоремы 21 можно уточнить.

Теорема 22. *Пусть $n = 2k+1 \ge 3$ и в $\mathbb{R}^n$ дано 2 семейства $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ выпуклых компактов. Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:*

1) Найдётся два представителя $K_1 \in \mathcal{F}_1$, $K_2 \in \mathcal{F}_2$, для которых $K_1 \cap K_2 = \emptyset$;

2) В некотором из семейств $\mathcal{F}_i$ любые $k+2$ или менее множеств имеют k-трансверсаль.

Теорема 23. *Пусть $k > 2, 2k < n+2$ и в $\mathbb{R}^n$ дано k семейств $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ выпуклых компактов. Пусть для некоторого $m \le n-k+1$ выполняется*

$$2^{\lceil \log_2 n \rceil} \ge k 2^{\lceil \log_2 (n-m) \rceil} + 2.$$

Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:

1) Найдётся система представителей $K_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, K_k \in \mathcal{F}_k$, для которых $\bigcap_{i=1}^k K_i = \emptyset$;

2) В некотором из семейств $\mathcal{F}_i$ любые $m+1$ или менее множеств имеют $m-1$-трансверсаль.

Неравенство в условии теоремы 23 выглядит достаточно сложно, но будет заведомо выполнено, если например $n \ge k(2n-2m-1)+2$.

Для доказательства этих теорем нам понадобится известная лемма (лемма 5.4 из [14]).

Лемма 4. *Для компактных Z_2-инвариантных подмножеств X и Y некоторого свободного Z_2-пространства имеет место неравенство*

$$\operatorname{hind}(X \cup Y) \le \operatorname{hind} X + \operatorname{hind} Y + 1.$$

Следующая лемма обобщает рассуждения из доказательства теоремы 21.

Лемма 5. *Пусть $k+1 \le m \le n-1$ и семейство строго выпуклых компактов $\mathcal{F} = \{K_1, K_2, \dots, K_{k+1}\}$ в $\mathbb{R}^n$ не имеет $k-1$-трансверсали. Тогда множество ориентированных m-трансверсалей $\mathcal{F}$ можно Z_2-эквивариантно отобразить в G_{n-k}^{m-k+}.*

Доказательство. Определим векторное расслоение $\eta \to K_1 \times \dots \times K_{k+1}$ следующим образом. У всякого набора точек $(x_1, \dots, x_{k+1}) \in K_1 \times \dots \times K_{k+1}$ аффинная оболочка $L(x_1, \dots, x_{k+1})$ имеет размерность ровно k, так как иначе у $\mathcal{F}$ нашлась бы $k-1$-трансверсаль. Факторпространство $M(x_1, \dots, x_{k+1}) = \mathbb{R}^n / L(x_1, \dots, x_{k+1})$ является $n-k$-мерным векторном пространством, и объединение всех таких пространств даёт расслоение η.

Пространство $K_1 \times \dots \times K_{k+1}$ стягиваемо, значит любое векторное расслоение над ним тривиально, то есть мы можем зафиксировать изоморфизм векторных расслоений

$$\phi : \eta \to \mathbb{R}^{n-k} \times K_1 \times \dots \times K_{k+1}$$

и его композицию с проекцией на первое слагаемое

$$\psi : \eta \to \mathbb{R}^{n-k}.$$

Обозначим теперь множество ориентированных m-трансверсалей для $\mathcal{F}$ за $T \subseteq \gamma_n^{n-m+}$. Для каждой $\tau \in T$ мы можем непрерывно (из строгой выпуклости) по τ выбрать $k+1$ точку в пересечениях

$$x_1(\tau) \in \tau \cap K_1 \; x_2(\tau) \in \tau \cap K_2, \; \dots, \; x_{k+1}(\tau) \in \tau \cap K_{k+1}.$$

Образ τ в естественной проекции $\mathbb{R}^n \to M(x_1(t), \dots, x_{k+1}(t))$ является ориентированным $m-k$-мерным подпространством $M(x_1(t), \dots, x_{k+1}(t))$, а после отображения

$\psi : M \to \mathbb{R}^{n-k}$ является ориентированным $m-k$-мерным подпространством в $\mathbb{R}^{n-k}$, что даёт искомое отображение T в G_{n-k}^{m-k+}. $\square$

Доказательство теоремы 22. Из соображений компактности ясно, что достаточно доказать теорему для семейств строго выпуклых компактов.

Обозначим множество ориентированных гиперплоских трансверсалей семейства $\mathcal{F}_i$ через $Y_i \subseteq \gamma_n^{1+}$. Обозначим естественную проекцию этого множества на $G_n^{1+} = S^{n-1}$ через $X_i = \pi_\gamma(Y_i)$.

Тогда, если первая альтернатива не выполняется, то очевидно $X_1 \cup X_2 = S^{n-1}$ и по лемме 4 для одного из X_i имеем

$$\operatorname{hind} X_i \geq k.$$

В дальнейших рассуждениях фиксируем i и предполагаем противное. Пусть в $\mathcal{F}_i$ найдутся $k+2$ множества $K_1, \dots, K_{k+2}$ без k-трансверсали.

По лемме 5 множество Y_i эквивариантно отображается в $G_k^{1+} = S^{k-1}$ некоторым отображением f_i. Естественная проекция $\pi_\gamma : Y_i \to X_i$ в качестве слоёв имеет отрезки, непрерывно зависящие от слоя. Следовательно, $\pi_\gamma|_{Y_i}$ имеет (очевидно, эквивариантное) сечение $\tau_i : X_i \to Y_i$. Значит получаем эквивариантное отображение $f_i \circ \tau_i : X_i \to S^{k-1}$, что невозможно по свойствам индекса. $\square$

Доказательство теоремы 23. Из соображений компактности ясно, что достаточно доказать теорему для семейств строго выпуклых компактов.

Обозначим $Y_i \subseteq \gamma_n^{k-1^+}$ — множество $n-k+1$-трансверсалей для $\mathcal{F}_i$, $X_i = \pi_\gamma(Y_i) \subseteq G_n^{k-1^+}$ — множество соответствующих направлений. Заметим, что проекция $\pi_\gamma : Y_i \to X_i$ имеет слоем выпуклое множество, непрерывно (из строгой выпуклости) зависящее от слоя, и эта проекция имеет сечение $\tau_i : X_i \to Y_i$.

Тогда, если первая альтернатива не выполняется, то по цветной теореме Хелли для проекций наших семейств на $k-1$-мерные плоскости $\bigcup_{i=1}^k X_i = G_n^{n-k+1^+}$.

Если же не выполняется вторая альтернатива, то по лемме 5 каждое Y_i (а значит и X_i) можно эквивариантно отобразить в $G_{n-m}^{n-k-m+1^+}$. По монотонности индекса и теореме 13

$$\operatorname{hind} X_i \leq 2^{\lceil \log_2 (n-m) \rceil} - 1.$$

Тогда по лемме 4 получаем

$$\operatorname{hind} G_n^{n-k+1^+} \leq k 2^{\lceil \log_2 (n-m) \rceil} - 1.$$

Но теорема 13 даёт оценку $\operatorname{hind} G_n^{n-k+1^+} \geq 2^{\lceil \log_2 n \rceil} - 2$, что приводит к противоречию с неравенством из условия теоремы. $\square$

9. Благодарности

Автор признателен В.Л. Дольникову за содержательное обсуждение результатов работы и значительную помощь при редактировании текста.

Список литературы

[1] K. Borsuk. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. // Fund. Math., 20, 1933, 177–190.

[2] E. Helly. Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten. // Jber Deutsch. Math. Verein., 32, 1923, 175–176.

[3] I. Bárány. A generalization of Carathéodory's theorem. // Discrete Math., 40, 1982, 141–152.

[4] В.Л. Дольников. Обобщенные трансверсали семейств множеств в $\mathbb{R}^n$ и связи между теоремами Хелли и Борсука. // Доклады АН СССР, 297(4), 1987, 777–780.

[5] S.E. Cappell, J.E. Goodman, J. Pach, R. Pollack, M. Sharir, R. Wenger. Common tangents and common transversals. // Adv. in Math., 106, 1994, 198—215.

[6] A. Horn. Some generalization of Helly's theorem on convex sets. // Bull. Amer. Math. Soc., 55, 1949, 923–929.

[7] V. Klee. On certain intersection properties of convex sets. // Canad. J. Math., 3, 1951, 272–275.

[8] A.H. Stone, J.W. Tukey. Generalized 'Sandwich' Theorems. // Duke Math. J., 9, 1942, 356–359.

[9] H. Steinhaus. Sur la division des ensembles de l'espaces par les plans et et des ensembles plans par les cercles. // Fund. Math., 33, 1945, 245–263.

[10] T. Bisztriczky. On separated families of convex bodies. // Arch. Math., 54, 1990, 193—199.

[11] V. Klee, T. Lewis, B. Von Hohenbalken. Appollonius revisited: supporting spheres for sundered systems. // Discrete and Computational Geometry, 18, 1997, 385—395.

[12] В.В. Макеев. Некоторые экстремальные задачи для векторных расслоений. // Алгебра и анализ, 19(2), 2007, 131–155.

[13] Wu Yi Hsiang. Cohomology theory of topological transformation groups. — Berlin-Heidelberg-New-York: Springer Verlag, 1975.

[14] А.Ю. Воловиков, Е.В. Щепин. Антиподы и вложения. // Математический сборник, 196(1), 2005, 3–32.

[15] R.N. Karasev. Colored versions of the Sperner theorem and the KKM theorem. // Third Russian-German Geometry Meeting dedicated to 95th birthday of A.D. Alexandrov, Abstracts, St.-Petersburg, Russia, June 18–23, 2007, 17–18.

[16] М. Холл. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970.

[17] Р.Н. Карасёв. Раскрашенная версия леммы Кнастера-Куратовского-Мазуркевича. // Моделирование и анализ информационных систем, 13(2), 2006, 66–70.

[18] H.L. Hiller. On the cohomology of real grassmanians. // Trans. Amer. Math. Soc., 257(2), 1980, 521–533.

[19] H.L. Hiller. On the height of the first Stiefel-Whitney class. // Proc. Amer. Math. Soc., 79(3), 1980, 495–498.

[20] Г.Е. Шилов, Б.Л. Гуревич. Интеграл, мера и производная. — М.: Наука, 1967.

[21] I. Bárány, A. Hubard, J. Jerónimo. Slicing convex sets and measures by a hyperplane. // Discrete and Computational Geometry, 39, 2008, 67–75.

[22] В.Л. Дольников. Теоремы типа Хелли для трансверсалей семейств множеств и их приложения. Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. — Ярославль: Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, 2001.

141700, г. Долгопрудный, Институтский пер. 9, кафедра высшей математики, Р.Н. Карасёв

E-mail address: r_n_karasev@mail.ru