СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

04 ДЕКАБРЯ 2016

1–2 КУРС

1. Пусть последовательность x_n такова, что последовательности

$$y_n = \sum_{i=0}^{2016} x_{n+i}, \quad z_n = \sum_{i=0}^{128} x_{n+i}$$

сходятся. Верно ли, что x_n сходится?

Ответ: верно.

Решение. Мы будем использовать только, что числа $a = 2017$ и $b = 129$ взаимно просты. Из взаимной простоты следует, что найдутся натуральные a' и b', такие что $a'a - b'b = 1$. Тогда

$$x_n = \sum_{i=0}^{a'-1} y_{n+ai} - \sum_{i=0}^{b'-1} y_{n+1+bi}$$

и очевидно x_n сходится, так как количество слагаемых в суммах фиксировано.

2. Для чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ и отличного от них числа x докажите тождество

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-x_i} \prod_{j\neq i} \frac{1}{x_i - x_j}.$$

Решение. Должно иметь место разложение на элементарные дроби

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x-x_i},$$

в котором число a_i можно найти, домножив обе части на $(x - x_i)$ и перейдя к пределу $x \to x_i$.

3. Эллипс, парабола и гипербола описаны около трапеции. Докажите, что прямая, соединяющая центры эллипса и гиперболы, параллельна оси параболы.

Решение. В курсе аналитической геометрии доказывается, что прямая, соединяющая середины двух параллельных хорд эллипса, проходит через его центр. Аналогично доказывается для гиперболы. А для параболы доказывается, что прямая, соединяющая середины двух параллельных ход, параллельна оси параболы. Отсюда следует утверждение задачи.

Другое решение. Переведём трапецию в симметричную относительно оси ℓ аффинным преобразованием, при этом понятие центра кривой второго порядка не меняется, и понятие параллельности оси параболы — тоже.

Заметим, что всякая кривая второго порядка C, проходящая через вершины трапеции T, тоже должна быть симметрична, как и T. Действительно, образ C при симметрии, обозначим его C', обязан проходить через все вершины T и ещё через одну или две точки $C \cap \ell$, следовательно C и C' имеют не менее пяти общих точек (возможно точка $C \cap \ell$ комплексная) и обязаны совпадать.

Тогда мы получаем, что все центры таких кривых лежат на ℓ, что равносильно тому что мы хотим доказать.

4. Можно ли интервал (a, b) представить в виде объединения счётного числа попарно непересекающихся отрезков?

   Ответ: нет.

   Решение. Предположим, что можно. Пусть эти отрезки – $I_1, I_2, \ldots$... Определим теперь последовательность интервалов по индукции. Положим $(a_1, b_1) = (a, b)$. Если отрезок I_n попадает внутрь (a_n, b_n), то он разбивает его на две части, и нам надо выбрать в качестве (a_{n+1}, b_{n+1}) одну из них. Будем выбирать в таких случаях левую и правую часть попеременно. Если отрезок I_n не пересекает (a_n, b_n), то положим $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, b_n)$. Заметим, что отрезок I_n не может содержать точки a_n или b_n, так как по предыдущему построению эти точки либо лежат за пределами (a, b) (то есть совпадают с его концами), либо являются концом одного из отрезков I_k при $k < n$, который I_n не может пересекать по предположению.

   Заметим также, что по построению интервал (a_n, b_n) не пересекает ни один отрезок I_k с $k < n$. У построенных последовательностей есть пределы

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{и} \quad b = \lim_{n\to\infty} b_n$$

   и пусть $c = 1/2(a + b)$. Если $a < b$, то c лежит в каждом (a_n, b_n) и остаётся не покрытой ни каким I_k. Значит, $a = b = c$ и, в частности, мы уменьшали интервал (a_n, b_n) бесконечное число раз, переходя попеременно к его левой или правой части. Это означает, что ни одна из последовательностей (a_n) или (b_n) не стабилизируется и значит c всё равно лежит в каждом интервале (a_n, b_n) и не покрывается ни одним из I_k. Противоречие.

5. Докажите, что для любого целого $n \geq 2$ существует многочлен степени не более n с коэффициентами из $\{-1, 0, 1\}$, имеющий корень 1 кратности не менее $\left\lfloor \sqrt{\frac{n}{1000 \log_2 n}} \right\rfloor$.

   Решение. Пусть наш многочлен $P(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$, приравнивая нулю его производные в точке $x = 1$ до d-й включительно получим систему из $d + 1$ уравнения

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} a_m = 0, \quad k = 0, \ldots, d.$$

Давайте попробуем представить многочлен $P(x)$ в виде разности $Q(x) - R(x)$ многочленов с коэффициентами из $\{0, 1\}$, тогда нам надо решить систему

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} b_m = \sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} c_m, \quad k = 0, \dots, d$$

для $b_m, c_m \in \{0, 1\}$ так, чтобы последовательности (b_m) и (c_m) были разными. Заметим, что двоичных последовательностей $(y_0, \dots, y_n)$ длины $n+1$ ровно 2^{n+1}, оценим количество различных комбинаций сумм

$$\left(\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} y_m \right)_{k=0}^{d}.$$

Первая сумма лежит от 0 до $n + 1$, вторая лежит от 0 до $\binom{n+2}{2}$, третья — до $\binom{n+3}{3}$ и так далее, до $\binom{n+d+1}{d+1}$ для d-й суммы (используем формулу для суммы биномиальных коэффициентов). Количество вариантов тогда

$$\prod_{k=0}^{d} \left(\binom{n+k+1}{k+1} + 1 \right) < \prod_{k=0}^{d} (n+d)^{k+1} < (n+d)^{(d+2)^2/2}.$$

Совпадение для $Q(x)$ и $R(x)$ будет гарантировано, если

$$(n+d)^{(d+2)^2/2} < 2^{n+1} \Leftarrow \frac{(d+2)^2}{2} \log_2(n+d) < n+1 \Leftarrow$$
$$\Leftarrow \frac{(d+2)^2}{2} \log_2(2n) < n+1 \Leftarrow d+2 < \sqrt{\frac{2n+2}{\log_2 n + 1}}.$$

Отсюда видно, что при $d = \left\lfloor \sqrt{\frac{n}{1000 \log_2 n}} \right\rfloor$ условие выполнено.

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
04 ДЕКАБРЯ 2016

3–6 КУРС

1. Эллипс, парабола и гипербола описаны около трапеции. Докажите, что прямая, соединяющая центры эллипса и гиперболы, параллельна оси параболы.

   Решение. В курсе аналитической геометрии доказывается, что прямая, соединяющая середины двух параллельных хорд эллипса, проходит через его центр. Аналогично доказывается для гиперболы. А для параболы доказывается, что прямая, соединяющая середины двух параллельных ход, параллельна оси параболы. Отсюда следует утверждение задачи.

   Другое решение. Переведём трапецию в симметричную относительно оси ℓ аффинным преобразованием, при этом понятие центра кривой второго порядка не меняется, и понятие параллельности оси параболы — тоже.

   Заметим, что всякая кривая второго порядка C, проходящая через вершины трапеции T, тоже должна быть симметрична, как и T. Действительно, образ C при симметрии, обозначим его C', обязан проходить через все вершины T и ещё через одну или две точки $C \cap \ell$, следовательно C и C' имеют не менее пяти общих точек (возможно точка $C \cap \ell$ комплексная) и обязаны совпадать.

   Тогда мы получаем, что все центры таких кривых лежат на ℓ, что равносильно тому что мы хотим доказать.

2. Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такова, что её квадрат $f(z)^2$ оказался многочленом от z. Верно ли, что сама f — многочлен?

   Ответ: да.

   Решение. Пусть $f(z)^2 = P(z)$. Тогда f аналитическая по крайней мере за пределами множества нулей P. По теореме о продолжении она и в нулях P тоже аналитическая. При этом её модуль $|f(z)|$ растёт не быстрее некоторой степени $|z|$, следовательно, по формуле Коши, только конечное количество коэффициентов её ряда Тейлора может быть ненулевым. То есть она является многочленом.

3. Пусть конформное отображение переводит кольцо $r < |z| < R$ в другое кольцо на комплексной плоскости и продолжается до непрерывного отображения границы кольца в границу нового кольца. Докажите, что отношение R/r при таком отображении сохраняется.

   Решение. Заметим, что с помощью инверсии и склеивания конформных отображений по границе, заданное нам отображение f можно продолжить на кольца $r/R^2 < |z| < r$ и $R < |z| < R^2/r$. Продолжая применять инверсию дальше, мы продолжим f до отображения, конформного на всей плоскости. Кроме того, из конструкции ясно, что f по непрерывности продолжается до $f(0) = 0$ и $f(\infty) = \infty$. Тогда f должно быть поворотной гомотетией на всей плоскости, которая, очевидно, сохраняет отношение R/r.

4. Можно ли интервал (a,b) представить в виде объединения счётного числа попарно непересекающихся отрезков?

   Ответ: нет.

   Решение. Предположим, что можно. Пусть эти отрезки – $I_1, I_2, \ldots$... Определим теперь последовательность интервалов по индукции. Положим $(a_1, b_1) = (a, b)$. Если отрезок I_n попадает внутрь (a_n, b_n), то он разбивает его на две части, и нам надо выбрать в качестве (a_{n+1}, b_{n+1}) одну из них. Будем выбирать в таких случаях левую и правую часть попеременно. Если отрезок I_n не пересекает (a_n, b_n), то положим $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, b_n)$. Заметим, что отрезок I_n не может содержать точки a_n или b_n, так как по предыдущему построению эти точки либо лежат за пределами (a,b) (то есть совпадают с его концами), либо являются концом одного из отрезков I_k при $k < n$, который I_n не может пересекать по предположению.

   Заметим также, что по построению интервал (a_n, b_n) не пересекает ни один отрезок I_k с $k < n$. У построенных последовательностей есть пределы

   $$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{и} \quad b = \lim_{n\to\infty} b_n$$

   и пусть $c = 1/2(a+b)$. Если $a < b$, то c лежит в каждом (a_n, b_n) и остаётся не покрытой ни каким I_k. Значит, $a = b = c$ и, в частности, мы уменьшали интервал (a_n, b_n) бесконечное число раз, переходя попеременно к его левой или правой части. Это означает, что ни одна из последовательностей (a_n) или (b_n) не стабилизируется и значит c всё равно лежит в каждом интервале (a_n, b_n) и не покрывается ни одним из I_k. Противоречие.

5. Докажите, что для любого целого $n \geq 2$ существует многочлен степени не более n с коэффициентами из $\{-1, 0, 1\}$, имеющий корень 1 кратности не менее $\left\lfloor \sqrt{\frac{n}{1000 \log_2 n}} \right\rfloor$.

   Решение. Пусть наш многочлен $P(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$, приравнивая нулю его производные в точке $x = 1$ до d-й включительно получим систему из $d+1$ уравнения

   $$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} a_m = 0, \quad k = 0, \ldots, d.$$

   Давайте попробуем представить многочлен $P(x)$ в виде разности $Q(x) - R(x)$ многочленов с коэффициентами из $\{0, 1\}$, тогда нам надо решить систему

   $$\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} b_m = \sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} c_m, \quad k = 0, \ldots, d$$

   для $b_m, c_m \in \{0, 1\}$ так, чтобы последовательности (b_m) и (c_m) были разными. Заметим, что двоичных последовательностей $(y_0, \ldots, y_n)$ длины $n+1$ ровно 2^{n+1}, оценим количество различных комбинаций сумм

   $$\left(\sum_{m=0}^{n} \binom{m}{k} y_m \right)_{k=0}^{d}.$$

Первая сумма лежит от 0 до $n+1$, вторая лежит от 0 до $\binom{n+2}{2}$, третья — до $\binom{n+3}{3}$ и так далее, до $\binom{n+d+1}{d+1}$ для d-й суммы (используем формулу для суммы биномиальных коэффициентов). Количество вариантов тогда

$$\prod_{k=0}^{d}\left(\binom{n+k+1}{k+1}+1\right) < \prod_{k=0}^{d}(n+d)^{k+1} < (n+d)^{(d+2)^2/2}.$$

Совпадение для $Q(x)$ и $R(x)$ будет гарантировано, если

$$(n+d)^{(d+2)^2/2} < 2^{n+1} \Leftarrow \frac{(d+2)^2}{2}\log_2(n+d) < n+1 \Leftarrow$$
$$\Leftarrow \frac{(d+2)^2}{2}\log_2(2n) < n+1 \Leftarrow d+2 < \sqrt{\frac{2n+2}{\log_2 n+1}}.$$

Отсюда видно, что при $d = \left\lfloor\sqrt{\frac{n}{1000\log_2 n}}\right\rfloor$ условие выполнено.