СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

04 ДЕКАБРЯ 2016

1–2 КУРС

1. Пусть последовательность x_n такова, что последовательности
$$y_n = \sum_{i=0}^{2016} x_{n+i}, \quad z_n = \sum_{i=0}^{128} x_{n+i}$$
сходятся. Верно ли, что x_n сходится?

2. Для чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ и отличного от них числа x докажите тождество
$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-x_i} \prod_{j\neq i} \frac{1}{x_i - x_j}.$$

3. Эллипс, парабола и гипербола описаны около трапеции. Докажите, что прямая, соединяющая центры эллипса и гиперболы, параллельна оси параболы.

4. Можно ли интервал (a, b) представить в виде объединения счётного числа попарно непересекающихся отрезков?

5. Докажите, что для любого целого $n \geq 2$ существует многочлен степени не более n с коэффициентами из $\{-1, 0, 1\}$, имеющий корень 1 кратности не менее $\left\lfloor \sqrt{\frac{n}{1000 \log_2 n}} \right\rfloor$.

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
04 ДЕКАБРЯ 2016

3–6 КУРС

1. Эллипс, парабола и гипербола описаны около трапеции. Докажите, что прямая, соединяющая центры эллипса и гиперболы, параллельна оси параболы.

2. Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такова, что её квадрат $f(z)^2$ оказался многочленом от z. Верно ли, что сама f — многочлен?

3. Пусть конформное отображение переводит кольцо $r < |z| < R$ в другое кольцо на комплексной плоскости и продолжается до непрерывного отображения границы кольца в границу нового кольца. Докажите, что отношение R/r при таком отображении сохраняется.

4. Можно ли интервал (a, b) представить в виде объединения счётного числа попарно непересекающихся отрезков?

5. Докажите, что для любого целого $n \geq 2$ существует многочлен степени не более n с коэффициентами из $\{-1, 0, 1\}$, имеющий корень 1 кратности не менее $\left\lfloor \sqrt{\frac{n}{1000 \log_2 n}} \right\rfloor$.