

УТВЕРЖДЕНО  
Проректор по учебной работе  
и довузовской подготовке  
А. А. Воронов  
09 января 2021 г.

## ПРОГРАММА

по дисциплине: Гармонический анализ  
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»  
физтех-школа: ФФПФ  
факультет: ФОПФ  
кафедра: высшей математики  
курс: 2  
семестр: 4

Трудоёмкость:

Базовая часть — 4 зач. ед.:

лекции — 45 часов

практические занятия — 45 часов

лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:  
60 часов

Составитель программы:

д. ф.-м. н., профессор Р. Н. Карасёв

Программа принята на заседании кафедры  
высшей математики 15 ноября 2022 г.

Заведующий кафедрой  
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

## **Приближение функций равномерно, в среднем и среднеквадратичном**

1. Равномерное приближение непрерывной функции на отрезке кусочно-линейными функциями и приближение кусочно-линейных функций многочленами.
2. Приближение непрерывных  $2\pi$ -периодических функций тригонометрическими многочленами.
3. \* Алгебры непрерывных на компактах функций. Теорема Стоуна–Вейерштрасса.
4. Пространства  $L_p$ . Неравенства Гёльдера и Минковского.
5. Полнота пространства  $L_p$ .
6. Приближение функций в  $L_p$  ступенчатыми и бесконечно гладкими.

## **Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция**

7. Функции ограниченной вариации, представление функции ограниченной вариации в виде суммы монотонных и ограниченных.
8. Абсолютно непрерывные функции, абсолютная непрерывность интеграла с переменным верхним пределом.
9. Представление абсолютно непрерывной функции в виде суммы монотонных абсолютно непрерывных функций.
10. Существование производной почти всюду у абсолютно непрерывной функции и обобщённая формула Ньютона–Лейбница.
11. Абсолютная непрерывность произведения абсолютно непрерывных функций и обобщённое интегрирование по частям.
12. Теорема Римана об осцилляции и равномерной осцилляции.
13. Порядок убывания коэффициентов Фурье абсолютно непрерывных и несколько раз обобщённо дифференцируемых функций.
14. Порядок убывания коэффициентов Фурье функций ограниченной вариации.

## **Ряд Фурье в пространстве $L_2$**

15. Скалярное произведение в пространстве  $L_2$ , неравенство Коши–Буняковского.
16. Свойство минимальности коэффициентов Фурье по ортогональной системе функций в  $L_2$  и неравенство Бесселя
17. Полные системы в пространстве  $L_2$ . Полнота тригонометрической системы в  $L_2[-\pi, \pi]$ .
18. Сходимость ряда Фурье в  $L_2$  и равенство Парсеваля для коэффициентов Фурье функций из  $L_2[-\pi, \pi]$  по ортогональным системам.

## Тригонометрический ряд Фурье и его сходимость

19. Интегральное представление частичных сумм тригонометрического ряда Фурье, ядро Дирихле.
20. Принцип локализации для рядов Фурье и равномерный принцип локализации.
21. Признак Липшица равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке.
22. Признак Дирихле равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке.
23. Признаки Липшица, Дирихле и Дини сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.
24. Почленное дифференцирование и интегрирование тригонометрических рядов Фурье.
25. Теорема Фейера о суммировании тригонометрического ряда Фурье методом средних арифметических.
26. Представление котангенса и косеканса в виде бесконечной суммы элементарных дробей.
27. Формула дополнения для бета-функции.

## Интеграл Фурье и преобразование Фурье

28. Вычисление интеграла Дирихле с помощью дифференцирования по параметру.
29. Представление функций интегралом Фурье, свёртка с ядром Дирихле для интеграла Фурье.
30. Принцип локализации для интеграла Фурье.
31. Признаки Дини, Липшица и Дирихле сходимости интеграла Фурье для абсолютно интегрируемой функции.
32. Преобразование Фурье. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
33. Пространство  $\mathcal{S}$ , его инвариантность при преобразовании Фурье и непрерывность преобразования Фурье как отображения  $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ .
34. Унитарность преобразования Фурье относительно стандартного скалярного произведения в пространстве  $\mathcal{S}$ .
35. Продолжение преобразования Фурье на пространство  $L_2$ .
36. Явление Гиббса для представления  $\operatorname{sgn} x$  интегралом Фурье.
37. Преобразование Фурье функций нескольких переменных. Преобразование Фурье гауссовой плотности.

38. Формула обращения преобразования Фурье функции нескольких переменных с абсолютно интегрируемым преобразованием Фурье.
39. \* Формула обращения преобразования Фурье функции нескольких переменных с достаточным количеством непрерывных частных производных.
40. Свёртка функций из  $L_1$  и преобразование Фурье.

### **Банаховы пространства**

41. Нормированные векторные пространства и банаховы пространства. Полнота пространства  $C[a, b]$ .
42. Теорема Бэра в банаховом пространстве.
43. Двойственное к банахову пространству, эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного функционала.
44. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха–Штейнгауза) для семейств непрерывных линейных функционалов в банаховых пространствах.
45. Расходимость рядов Фурье непрерывных  $2\pi$ -периодических функций и норма свёртки с ядром Дирихле.
46. \* Явный пример непрерывной  $2\pi$ -периодической функции, ряд Фурье которой расходится в одной точке.
47. Непрерывные линейные отображения между банаховыми пространствами, их норма, эквивалентность ограниченности и непрерывности.
48. Факторпространство банахового пространства по замкнутому линейному подпространству. Его полнота и норма проекции на факторпространство.
49. Теорема об изоморфизме для непрерывных линейных отображений банаховых пространств.
50.  $\varepsilon$ -сети в метрических пространствах, эквивалентность предкомпактности и вполне ограниченности подмножества полного метрического пространства.
51. Теорема Арцела–Асколи о предкомпактных подмножествах в пространстве непрерывных на метрическом компакте функций.

### **Гильбертовы пространства**

52. Гильбертовы пространства над действительными и комплексными числами. Неравенство Коши–Буняковского.
53. Полнота и замкнутость ортонормированной системы в гильбертовом пространстве, ряд Фурье по ней, неравенство Бесселя и равенство Парсевала.
54. Изометрии гильбертовых пространств и описание с точностью до изометрии гильбертовых пространств, имеющих счётную полную систему.

55. Метрическая проекция на замкнутое аффинное подпространство гильбертового пространства.
56. Описание двойственного к гильбертову пространству.
- \* Лемма Цорна и двойственные пространства банаховых пространств**
57. \* Теорема Цермело и лемма Цорна.
58. \* Теорема Хана–Банаха. Вложение банахова пространства во второе двойственное.
59. \* Теорема Тихонова о произведении компактов.
60. \*-слабая топология двойственного к банахову пространству, компактность в \*-слабой топологии.
61. \* Теорема Хана о разложении меры со знаком.
62. \* Теорема Радона–Никодима о плотности абсолютно непрерывной (относительно меры Лебега) меры.
63. \* Теорема Рисса о двойственном пространстве к  $C[a, b]$ .

### **Распределения (обобщённые функции)**

64. Пространство  $\mathcal{E}$  и топология в нём, его полнота.
65. Связь непрерывности и ограниченности линейного отображения  $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ . Пространство  $\mathcal{E}'$  распределений с компактным носителем.
66. Описание элементов  $\mathcal{E}'$  через интегрирование производных по отрезку.
67. Пространство  $\mathcal{D}$  и определение сходимости в нём.
68. Пространство  $\mathcal{D}'$  распределений (обобщённых функций). Регулярные и нерегулярные распределения, дельта-функция.
69. Топология и сходимость в пространстве  $\mathcal{D}'$ , сходимость последовательности регулярных функций к дельта-функции.
70. Дифференцирование распределений, корректность его определения и непрерывность дифференцирования как операции  $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$ .
71. Умножение распределения в  $\mathcal{D}'$  на бесконечно гладкие функции, корректность его определения и непрерывность как операции  $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$ .
72. Равенство нулю распределения на открытом множестве, носитель распределения из  $\mathcal{D}'$ .
73. Пространство  $\mathcal{S}'$  обобщённых функций, преобразование Фурье обобщённых функций из  $\mathcal{S}'$ , преобразование Фурье дельта-функции.
74. \* Распределения на многообразиях, бескоординатное определение, сужение распределения на открытое множество.

### **Литература**

Основная

1. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа.  
[rkarasev.ru/common/upload/an\\_explanations.pdf](http://rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf)

Дополнительная

2. *Харди Г. Ч., Рогозинский В. В.* Ряды Фурье. — М.: Физматгиз, 1959.
3. *Katznelson Y.* An Introduction to Harmonic Analysis. — Cambridge University Press, 2004.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2006.

# ЗАДАНИЯ

*Замечание.* Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендуется разобрать на семинарских занятиях. Если задача с подчёркнутым номером была разобрана, то студент не обязан записывать её решение в домашнее задание.

## ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 4–8 марта)

### I. Неравенства, пространства $L_p$ и вариация

1. Пусть  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  — возрастающая выпуклая функция. Докажите, что функция  $f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , заданная формулой  $f_n(x) = f(|x|)$ , тоже выпуклая.

2. Докажите, что если  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  выпуклая, то для любого набора  $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^n$  и неотрицательных коэффициентов  $t_1, \dots, t_N$ , в сумме дающих 1, выполняется

$$f(t_1 v_1 + \dots + t_N v_N) \leq t_1 f(v_1) + \dots + t_N f(v_N).$$

3. Докажите, что если функция  $f$  определена на открытом множестве  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  и выпукла, то она непрерывна на  $U$ .

4. Докажите, что для абсолютно интегрируемой  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  выполняется неравенство

$$\int_0^1 e^{f(x)} dx \geq e^{\int_0^1 f(x) dx}.$$

5. Докажите для измеримой  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , и положительных  $s < t$  неравенство

$$\left( \int_0^1 f(x)^s dx \right)^{1/s} \leq \left( \int_0^1 f(x)^t dx \right)^{1/t}.$$

6. Положительная функция на промежутке называется *логарифмически выпуклой*, если её логарифм выпуклый. Докажите, что сумма логарифмически выпуклых функций логарифмически выпукла.

7. Докажите, что функция  $\ln \det A$  вогнута на множестве положительно определённых симметричных матриц  $A$  любого размера.

8. Докажите, что  $L_2[0, 1] \subseteq L_1[0, 1]$ , но  $L_2(\mathbb{R}) \not\subseteq L_1(\mathbb{R})$ . Проверьте, что в первом случае вложение строгое.

9. Докажите, что если функция  $f$  лежит в  $L_1(\mathbb{R})$  и в  $L_4(\mathbb{R})$ , то она лежит и в  $L_2(\mathbb{R})$ .

10. Пусть  $f \in L_2(\mathbb{R})$ . Докажите, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0.$$

11. Имеет ли ограниченную вариацию на интервале  $(0, 1)$  функция:

- а)  $x \sin \frac{1}{x}$ ;  
б)  $x^2 \sin \frac{1}{x}$ ?

12. Докажите, что если функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  имеет ограниченную вариацию на всей прямой, то для любого  $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)| dx \leq \|f\|_B \cdot |t|.$$

13. Докажите, что абсолютно непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке ограниченную вариацию.

14\*. Проведите пример непрерывной функции на отрезке, которая имеет ограниченную вариацию, но не является абсолютно непрерывной.

## II. Порядок убывания коэффициентов Фурье

15. Найдите порядок убывания коэффициентов в Фурье в виде  $c_n = O\left(\frac{1}{n^s}\right)$  разложения функции  $f$  по тригонометрической системе на отрезке  $[-\pi, \pi]$ :

- а)  $f(x) = x^6$ ; б)  $f(x) = (x^2 - \pi^2)^5$ ;  
в)  $f(x) = (x^2 - \pi^2) \sin^2 x$ ; г)  $f(x) = |\sin^7 x|$ .

16\*. Найдите порядок убывания коэффициентов Фурье функции  $f(x) = \sqrt{|x|}$  по тригонометрической системе на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

## III. Поточечная и равномерная сходимость рядов Фурье

17. Разложите в ряд Фурье по тригонометрической системе на отрезке  $[-\pi, \pi]$ :

- а)  $f(x) = \sin^7 x$ ; б)  $f(x) = \sin^8 x + \cos^8 x$ .

18. Разложите в ряд Фурье по тригонометрической системе на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , постройте график суммы ряда и исследуйте ряд на равномерную сходимость:

- а)  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ; б)  $f(x) = |x|$ ; в)  $f(x) = x$ ; г)  $f(x) = x^2$ .

19. Разложите в ряд Фурье по 1-периодической тригонометрической системе, постройте график суммы ряда и исследуйте ряд на равномерную сходимость:

- а)  $f(x) = \{x\}$  (дробная часть  $x$ ); б)  $f(x) = \sin \pi x$ .



**20.** Разложите функцию, заданную формулой  $\cos ax$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$  при  $a \notin \mathbb{Z}$ , в ряд Фурье. Выведите из полученного выражения формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - \pi k} \\ \frac{1}{\sin x} &= v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x - \pi k} \\ \sin x &= x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right), \end{aligned}$$

где  $v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n a_k$ .

**21.** Разложите в тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме на отрезке  $[-\pi, \pi]$  функции ( $|a| < 1$ ):

а)  $f(x) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos x + a^2}$ ; б)  $f(x) = \frac{1 - a \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2}$ .

**22.** Как следует продолжить функцию  $f \in L_1[0, \pi/2]$  на отрезок  $[-\pi, \pi]$ , чтобы

- а) её ряд Фурье имел вид  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k - 1)x$ ;  
 б) её ряд Фурье имел вид  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2k - 1)x$ ?

**23.** Сходятся ли равномерно ряды Фурье функции  $f(x) = e^x, x \in [0; \pi/2]$  по системам:

- а)  $\{\sin(2k - 1)x\}_{k=1}^{\infty}$ ; б)  $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$ ; в)  $\{\cos(2k - 1)x\}_{k=1}^{\infty}$ ; г)  $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$ ?  
 Постройте графики сумм этих рядов.

**24.** Докажите, что если тригонометрический ряд сходится в среднем к функции  $f \in L_1[-\pi, \pi]$ , то он является рядом Фурье функции  $f$ .

**25.** Являются ли следующие выражения рядами Фурье функций из  $L_1[-\pi, \pi]$ :

- а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ ?

#### IV. Интегрирование ряда Фурье и равенство Парсеваля

**26.** Докажите, что выражение  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$  не является рядом Фурье никакой абсолютно интегрируемой функции.

**27.** Докажите, что если у функции  $f \in L_1[-\pi, \pi]$  все коэффициенты Фурье нулевые, то  $f$  равна нулю почти всюду.

**28.** Исходя из разложения  $x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$ , получите интегрированием разложения функций  $x^2, x^3, x^4$  в тригонометрический ряд Фурье на  $[-\pi, \pi]$ .

**29.** С помощью равенства Парсеваля вычислите суммы рядов:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ ; в)\*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8}$ .

## V. Суммирование по Чезаро и суммы Фейера

**30.** Найдите суммы по Чезаро рядов:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ; б)  $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ .

**31.** Докажите, что если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится в обычном смысле, то его сумма по Чезаро равна его сумме.

**32.** Докажите, что при суммировании ряда Фурье ограниченной на  $[0, 2\pi]$  функции по Фейеру значения сумм в точке  $x$  не выходят за диапазон значений функции.

**33.** Докажите, что для любой  $f \in L_1[-\pi, \pi]$ ,  $L_1$ -норма любой суммы Фейера функции  $f$  не превосходит  $L_1$ -нормы самой функции  $f$ .

**34\***. Докажите, что суммы Фейера любой функции  $f \in L_1[-\pi, \pi]$  сходятся в среднем на отрезке  $[-\pi, \pi]$  к функции  $f$ .

**35\***. Пусть последовательность  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  положительных чисел убывает, стремится к нулю и выпукла (в смысле  $a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1} \geq 0$  при  $n \geq 1$ ). Докажите, что сумма

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

неотрицательна (в некоторых точках может быть  $+\infty$ ).

**36\***. Пусть функция  $f$  непрерывная и  $2\pi$ -периодическая,  $\alpha$  — иррациональное число. Докажите, что предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_0 + 2\pi\alpha k)$$

не зависит от  $x_0$ .

## ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 1–5 апреля)

### I. Собственные интегралы, зависящие от параметра

1. Выясните, можно ли переставить интегрирование и переход к пределу в выражениях:

а)  $\lim_{a \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} \frac{a}{x^2 + a^2} dx$ ; б)  $\lim_{a \rightarrow +0} \int_0^1 \frac{x}{a^2} e^{-x^2/a^2} dx$ .

2. Найдите производную по параметру  $a > 0$  интеграла  $\int_{1/a}^{2/a} \frac{\sin ax}{x} dx$ .

3. С помощью дифференцирования интеграла  $\int_0^x \frac{1}{t^2 + a^2} dt$  по параметру  $a > 0$ , вычислите интеграл  $\int_0^x \frac{1}{(t^2 + a^2)^2} dt$ .

4. С помощью дифференцирования интеграла по параметру  $a > 1$ , вычислите интеграл  $\int_0^\pi \ln(a^2 - \sin^2 x) dx$ .

5. Вычислите интеграл при натуральных  $n$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^{2n}} dx.$$

- 6\*. Определим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Докажите, что для любого натурального  $k$  и любого  $x \in \mathbb{R}$  выполняется неравенство  $|f^{(k)}(x)| \leq 1$ .

### II. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

7. Сходится ли интеграл равномерно по параметру  $a \in E_1$ ,  $a \in E_2$

а)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx$ ,  $E_1 = (1, +\infty)$ ,  $E_2 = (1 + \delta, +\infty)$ ,  $\delta > 0$ ;

б)  $\int_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx$ ,  $E_1 = (-1, 1)$ ,  $E = [0, +\infty)$ ;

- в)  $\int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx, E_1 = [-1, 1], E_2 = \mathbb{R};$   
 г)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(x-a)^6} dx, E_1 = (-\infty, 0], E_2 = [0, +\infty);$   
 д)  $\int_0^{+\infty} \sqrt{a} e^{-ax^2} dx, E_1 = [0, 1], E_2 = [1, +\infty);$   
 е)  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^a} dx, E_1 = (-\infty, 0], E_2 = [0, +\infty)?$

8. Вычислите интегралы Дирихле и Лапласа с параметром  $a \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx, \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx, \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx.$$

9. Пусть функция  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в нуле и для любого  $A > 0$  сходится несобственный интеграл  $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ . Докажите, что при любых  $a, b > 0$  справедлива формула Фруллани (для несобственного в нуле и бесконечности интеграла):  $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$ .

10. Вычислите интеграл с помощью формулы Фруллани для  $a, b > 0$ :

- а)  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx$ ; б)  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ ;  
 в)  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$ ; г)  $\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx$ .

11. Вычислите интеграл, зависящий от параметров  $a, b, c > 0$ :

- а)  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos ax}{x^2} dx$ ; б)  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 ax}{x^3} dx$ ; в)  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 ax}{x^2} dx$ ;  
 г)  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cos ax}{x^2} dx$ ; д)  $\int_0^{+\infty} \frac{(e^{-ax} - e^{-bx}) \cos cx}{x} dx$ ; е)  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2} dx$ .

### III. Интеграл Фурье и преобразование Фурье

12. Представьте функцию интегралом Фурье:

- а)  $f(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b), b > a$ ; б)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, a \neq 0$ ;  
 в)  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$  г)  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < \pi/2, \\ 0, & |x| \geq \pi/2. \end{cases}$

13. Вычислите интегралы Лапласа с помощью обращения преобразования Фурье.

14. Найдите преобразование Фурье функции с параметром  $a > 0$ :

а)  $f(x) = e^{-ax^2}$ ; б)  $f(x) = e^{-x^2/2} \cos ax$ ; в)  $f(x) = xe^{-a|x|}$ .

15. Докажите, что функция вида  $P(x)e^{-x^2/2}$ , где  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ , при преобразовании Фурье переходит в функцию того же вида  $Q(y)e^{-y^2/2}$ , причём  $\deg Q \leq \deg P$ .

16. Докажите, что для любой функции  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  и любых двух чисел  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$  выполняется неравенство (соотношение неопределённостей)

$$\|(x - x_0)f(x)\|_2 \cdot \|(y - y_0)\hat{f}(y)\|_2 \geq \frac{1}{2} \|f\|_2^2.$$

Выясните, в каком случае выполняется равенство.

17. Пусть  $\hat{f}(y)$  — преобразование Фурье функции  $f(x) = \frac{1}{1 + |x|^5}$ . Докажите, что

а)  $\hat{f}$  трижды непрерывно дифференцируема;

б)  $\hat{f}(y) = O\left(\frac{1}{y^6}\right)$  при  $y \rightarrow \infty$ .

18. Найдите преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x^{p-1}e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

при  $p > 0$ .

19. Вычислите преобразование Фурье функции  $f(x) = |x - 1| + |x + 1| - 2|x|$ , представив её как свёртку.

20. Определите, при каких  $y$  обращается в нуль преобразование Фурье функции  $f(x) = \frac{\sin^n x}{x^n}$ , в зависимости от натурального  $n$ .

21\*. Докажите, что если преобразование Фурье функции  $f \in L_1(\mathbb{R})$  равно нулю, то  $f$  равна нулю почти всюду.

22. Найдите  $f \in L_1[0, +\infty)$ , такую что  $\int_0^{+\infty} f(x) \sin yx \, dx = e^{-y}$  для любого  $y > 0$ .

23\*. Пусть функции  $f_1, \dots, f_{k+2} \in L_1(\mathbb{R})$  имеют ограниченную вариацию на всей прямой. Докажите, что свёртка  $f_1 * f_2 * \dots * f_{k+2}$  будет  $k$  раз непрерывно дифференцируема.

24. Найдите преобразование Фурье функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = e^{-Q(x)}$ , где  $Q(x)$  — положительно определённая квадратичная форма.

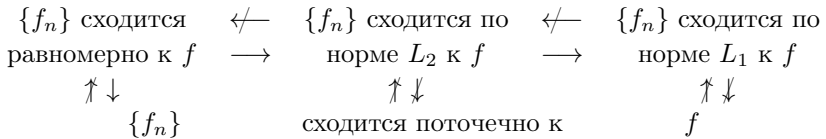
21 + 3\*

## ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 13–17 мая)

### I. Сходимость и полнота систем функций в пространствах $C$ и $L_p$

1. Докажите, что если  $f$  — функция, непрерывная на отрезке  $[a, b]$ , а  $\{f_n\}$  — последовательность функций, непрерывных на  $[a, b]$ , то между разными видами сходимости имеются связи, указанные в схеме (при перечеркнутой стрелке привести контрпример):



2. Приведите пример, когда последовательность функций  $(f_n)$  сходится в пространстве  $L_1[a, b]$ , но для любого  $x \in [a, b]$  последовательность чисел  $(f_n(x))$  расходится.
3. Докажите, что естественное отображение  $C[a, b] \rightarrow L_1[a, b]$  непрерывно и не сюръективно, не забывая, что элементы  $L_1$  — это не функции, а классы эквивалентности функций.
4. Полна ли система функций  $\{x^{2k-1}\}_{k=1}^\infty$  в пространстве  $L_1[0, 1]$ ?
5. Полна ли система функций  $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^\infty$  в пространстве
  - а)  $L_2[0, \pi/2]$ ; б)  $L_1[0, \pi/2]$ ; в)  $L_1[0, \pi]$ ?
6. Какая из систем функций  $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^\infty$ ,  $\{\sin 2kx\}_{k=1}^\infty$ ,  $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^\infty$ ,  $\{\cos 2kx\}_{k=0}^\infty$  полна в пространстве  $C[0, \pi/2]$ ?
7. Приведите пример какой-нибудь счётной системы функций, полной в пространстве  $L_2(\mathbb{R})$ .

### II. Конечномерные банаховы пространства

- 8.** Докажите, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, то есть одна оценивается через другую как

$$c\|\cdot\| \leq \|\cdot\|' \leq C\|\cdot\|$$

с некоторым положительными константами  $c, C$ .

- 9.** Докажите, что любое конечномерное нормированное пространство полно.

### III. Норма линейного функционала и линейного отображения

- 10.** Пусть пространство  $\ell_p^n$  ( $p > 1$ ) — это  $\mathbb{R}^n$  с нормой

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Докажите, что если  $1/p + 1/q = 1$ , то пространство  $\ell_p^n$  двойственно пространству  $\ell_q^n$ .

- 11.** Найдите норму функционала

$$f \mapsto \sum_{k=0}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$$

на пространстве  $C[0, 1]$  в зависимости от  $n \in \mathbb{N}$ .

- 12.** Пусть функция  $g$  непрерывна на  $[a, b]$ . Найдите норму линейного отображения

$$M_g : L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b], \quad M_g(f) = gf.$$

- 13.** Пусть функция  $K$  непрерывна на  $[a, b] \times [a, b]$ . Найдите норму линейного отображения

$$A : C[a, b] \rightarrow C[a, b], \quad A(f)(x) = \int_a^b K(x, y)f(y) dy.$$

- 14.** Пусть  $f \in L_1(\mathbb{R})$ . Докажите, что норма оператора  $C_f : L_1(\mathbb{R}) \rightarrow L_1(\mathbb{R})$ , заданного формулой  $C_f(g) = f * g$ , равна  $\|f\|_1$ .

- 15.** Докажите, что двойственное к пространству  $\ell_1$  абсолютно сходящихся последовательностей есть пространство ограниченных последовательностей  $\ell_\infty$  с нормой  $\|(a_n)\|_\infty = \sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

### IV. Базисы банаховых пространств

- 16.** Докажите, что алгебраический базис бесконечномерного банахова пространства не может быть счётным.

**17.** Является ли система функций  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  базисом в пространстве  $C[-1, 1]$ ?

**18.** Является ли тригонометрическая система функций

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$$

базисом в пространстве непрерывных  $2\pi$ -периодических функций с нормой  $\|\cdot\|_C$ ?

**19\***. Является ли тригонометрическая система функций

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$$

базисом в пространстве  $L_1[-\pi, \pi]$ ?

## V. Топологические свойства банаховых пространств

**20.** Докажите, что любое конечномерное линейное подпространство банахова пространства замкнуто.

**21.** Докажите, что в любом бесконечномерном банаховом пространстве  $E$  единичный шар не является компактным.

**22\***. Выведите из теоремы Хана–Банаха, что любое конечномерное подпространство  $V$  в банаховом пространстве  $E$  имеет замкнутое дополнение  $W \subseteq E$ , такое что  $E = V \oplus W$ .

**23\***. Приведите пример замкнутого в топологии нормы множества  $X \subset E'$  (двойственное к некоторому банахову пространству) которое не замкнуто в его \*-слабой топологии.

**24\***. Докажите, что в \*-слабой топологии  $E'$  компактность некоторого множества влечёт его замкнутость.

**25\***. Приведите пример топологического пространства, в котором есть компактные, но не замкнутые подмножества.

**26\***. Докажите, что в пространстве бесконечных в обе стороны последовательностей из нулей и единиц  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  с топологией декартова произведения сдвиг,  $(x_n) \mapsto (y_n)$ ,  $y_n = x_{n-1}$ , является гомеоморфизмом.

## VI. Распределения (обобщенные функции)

**27.** Найдите пределы последовательностей регулярных элементов пространства  $\mathcal{D}'$

а)  $f_n(x) = \cos nx$ ; б)  $f_n(x) = n \sin nx$ .



28. Докажите, что в  $\mathcal{D}'$  справедливы равенства

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + n^2 x^2} = \pi \delta(x)$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{x} = \pi \delta(x)$ .

29. Найдите в  $\mathcal{D}'$  предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 x}{(1 + n^2 x^2)^2}$ .

30. Упростите в  $\mathcal{D}'$  выражения

а)  $(e^{\sin x} + x \cos x) \delta(x)$ ; б)  $\left( \frac{x \operatorname{ch} x}{1 + x^4} - \sin x \right) \delta'(x)$ .

31. Найдите в  $\mathcal{D}'$  первые и вторые производные выражений

а)  $(x + \cos x) \operatorname{sign} x$ ; б)  $(x + 1)e^{|x|}$ .

32. Докажите, что при  $x_n \rightarrow \infty$  оказывается  $\delta_{x_n} \rightarrow 0$  в смысле слабой сходимости.

33. Докажите, что при конечном  $x_0$  слабая сходимост  $\delta_{x_n} \rightarrow \delta_{x_0}$  эквивалентна обычной сходимости  $x_n \rightarrow x_0$ .

34\*. Докажите, что любое распределение  $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  имеет первообразную, то есть такое распределение  $\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , что  $\mu' = \lambda$  в смысле дифференцирования распределений.

35. Докажите, что любые две первообразные одного и того же распределения отличаются на константу.

36\*. Приведите пример распределения  $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , которое не является  $m$ -й производной регулярного распределения ни для какого  $m$ .

## VII. Преобразование Фурье распределений

37. Найдите преобразование Фурье в  $\mathcal{S}'$  функции

- а)  $\sin x$ ;  
б)  $\delta^{(n)}$  ( $n$ -я производная дельта-функции);  
в)  $\vartheta(x)$  (функция Хевисайда).

38\*. Докажите, что если  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  и преобразование Фурье  $F[f] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , то  $f \equiv 0$ .

39\*. Докажите, что преобразование Фурье в  $\mathcal{S}'$  переводит распределение

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi n} \quad \text{в распределение} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n.$$

---

Задания составили:

д. ф.-м. н., профессор Р. Н. Карасёв,  
д. ф.-м. н., доцент А. И. Тюленев