

Утверждено
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
09 января 2020 г.

Программа

по дисциплине: Многомерный анализ, интегралы и ряды
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладная математика и физика»
физтех-школа: ФФПФ
факультет: ФОПФ
кафедра: высшей математики
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:

Базовая часть — 6 зач. ед.:

лекции — 60 часов

практические занятия — 60 часов

лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

Всего аудиторных часов — 120

Самостоятельная работа:
120 часов

Составитель программы:

д. ф.-м. н., профессор Р. Н. Карасёв

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 10 декабря 2021 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

Абсолютно сходящиеся числовые ряды

1. Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства. Перестановка слагаемых абсолютно сходящихся рядов.
2. Повторное суммирование и теорема о перемножении абсолютно сходящихся рядов.
3. Сравнение абсолютно сходящихся рядов. Сумма геометрической прогрессии.

Равномерная сходимоть функциональных последовательностей и рядов

4. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности и ряды. Критерий Коши равномерной сходимости.
5. Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
6. Теорема о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.
7. Теорема о производной предела последовательности дифференцируемых функций. Почленное дифференцирование функциональных рядов.

Степенные ряды

8. Степенные ряды, их радиус сходимости. Равномерная сходимоть степенных рядов в круге.
9. Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
10. Производные и первообразные степенных рядов в круге сходимости.
11. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Разложение функций e^x , $\sin x$, $\cos x$ в степенные ряды.
12. Разложение функций $\ln(1+x)$, $\arctg x$ в степенные ряды.
13. Разложение функции $(1+x)^\alpha$ в степенной ряд.

Условная сходимоть числовых и функциональных рядов

14. Преобразование Абеля. Сходимоть степенного ряда на конце интервала сходимости.
15. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.
16. * Перестановка слагаемых в условно сходящемся числовом ряде.

Интеграл Римана на отрезке

17. Разбиения отрезка, суммы Дарбу и интеграл Римана. Ступенчатые функции на отрезке, линейность и монотонность интеграла от ступенчатой функции.

18. Свойства интеграла Римана на отрезке: линейность, аддитивность, монотонность.
19. Интегрируемость по Риману модуля и произведения интегрируемых функций.
20. Суммы Римана интегрируемых функций и мелкость разбиений.
21. Интегрируемость по Риману непрерывной на отрезке функции.
22. Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу и существование первообразной у непрерывной функции.
23. Интегрируемость по Риману монотонной функции.
24. Формула Ньютона–Лейбница для интеграла Римана на отрезке.
25. Интегрирование по частям и замена переменных в интеграле Римана. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
26. Иррациональность числа e . * Доказательство иррациональности числа π по Нивену–Бурбаки.

Мера Лебега и её свойства

27. Мера элементарных множеств в евклидовом пространстве, корректность её определения и аддитивность.
28. Внешняя мера Лебега для подмножеств \mathbb{R}^n . Счётная субаддитивность внешней меры Лебега и её значение для элементарных множеств.
29. Расстояние между множествами в смысле внешней меры Лебега. Множества конечной меры Лебега и теоретико-множественные операции с ними.
30. Счётная аддитивность меры Лебега для множеств конечной меры.
31. Множества с возможно бесконечной мерой Лебега, операции с ними и счётная аддитивность меры Лебега в общем случае.
32. Счётные объединения и пересечения измеримых по Лебегу множеств.
33. Свойства непрерывности и регулярности меры Лебега.
34. * Пример не измеримого по Лебегу множества.
35. Измеримые по Лебегу функции и их свойства. Измеримость поточечного предела измеримых функций.
36. Борелевские множества, борелевские функции и их свойства.

Интеграл Лебега и его свойства

37. Счётно-ступенчатые функции и интеграл Лебега для них.
38. Приближение измеримой функции ступенчатыми и интеграл Лебега для измеримой функции.
39. Существование возможно бесконечного интеграла Лебега для неотрицательной измеримой функции.

40. Абсолютная интегрируемость интегрируемой по Лебегу функции и её разложение на неотрицательную и неположительную часть.

41. Линейность и монотонность интеграла Лебега.

Предельный переход в интеграле Лебега

42. Понятие приближения функции в среднем. Приближение интегрируемой функции в среднем ограниченной функцией.

43. Приближение в среднем интегрируемой функции функцией с конечным числом элементарных ступенек.

44. Счётная аддитивность интеграла Лебега по множествам интегрирования.

45. Непрерывность интеграла Лебега по множествам интегрирования и непрерывность интеграла Лебега по отрезку с переменным верхним пределом.

46. Теорема о монотонной сходимости. Перестановка счётного суммирования и интегрирования.

47. Теорема об ограниченной сходимости.

48. * Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

Несобственные интегралы функции одной переменной

49. Вторая теорема о среднем для интеграла произведения функций по отрезку.

50. Несобственные интегралы. Связь сходимости несобственного интеграла с существованием интеграла Лебега. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.

51. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.

52. Интегральный признак сходимости ряда неотрицательных чисел.

Повторное интегрирование и линейная замена переменных в интеграле Лебега

53. Представление неотрицательной измеримой функции в виде суммы счётного числа ступенек.

54. Мера декартова произведения измеримых множеств.

55. Теорема Фубини для борелевских функций.

56. Теорема Фубини для измеримых функций.

57. Мера подграфика неотрицательной функции и представление интеграла неотрицательной функции через интегрирование по области значений.

58. Линейная замена переменных в интеграле Лебега.

Применения интеграла Лебега

59. Интегралы, зависящие от параметра. Достаточные условия возможности переставить интегрирование и дифференцирование по параметру.

60. Интегральная теорема о среднем для непрерывной на связном множестве функции.
61. Вычисление интеграла Пуассона и объёма единичного шара в \mathbb{R}^n .
62. Гамма-функция, формула понижения и её значения при целых и полуцелых значениях аргумента.
63. Бета-функция и её выражение через гамма-функцию.
64. Асимптотическая формула Стирлинга для гамма-функции.
* **Дифференцируемость почти всюду**
65. * Лемма Безикевича о покрытии отрезками на прямой.
66. * Теорема о плотности измеримого множества на прямой.
67. * Усреднение интегрируемой по Лебегу на прямой функции, дифференцируемость почти всюду интеграла с переменным верхним пределом.
68. * Существование производной почти всюду и формула Ньютона–Лейбница для липшицевой функции одной переменной.

Дифференцирование функций нескольких переменных

69. Дифференцируемые функции нескольких переменных. Частные производные.
70. Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных в точке.
71. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных высших порядков. Теорема о независимости смешанной производной от порядка дифференцирования.
72. Формула Тейлора для функций нескольких переменных.

Литература

Основная

1. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа.
http://rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf

Дополнительная

2. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1, Т. 2. — М.: Наука, 2000.
3. *Tao T.* An Introduction to Measure Theory. — American Mathematical Society, 2011.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: Физматлит, 2003. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

Замечание. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендуется разобрать на семинарских занятиях. Если задача с подчёркнутым номером была разобрана, то студент не обязан записывать её решение в домашнее задание.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 26 февраля – 1 марта)

I. Множества в конечномерных евклидовых пространствах (С3, §§1,2)

Т.1. Является ли область определения выражения замкнутым множеством, открытым множеством, связным множеством

а) \sqrt{xy} ; б) $\frac{1}{x^4 + y^4 - 1}$; в) $\arcsin \frac{y}{x}$?

Т.2. Является ли множество

$$\{(e^t \cos t, e^t \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

на плоскости \mathbb{R}^2 а) открытым; б) замкнутым; в) связным?

Т.3. Является ли множество

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2\}$$

в пространстве \mathbb{R}^4 а) открытым; б) замкнутым; в) областью?

Т.4. Найдите для множества точек в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ с рациональными координатами множества его

а) внутренних точек; б) внешних точек; в) граничных точек.

Т.5. Постройте последовательность открытых множеств, пересечение которых не является открытым.

Т.6. Постройте незамкнутое множество, все точки которого изолированные.

Т.7. Докажите для произвольного $X \subseteq \mathbb{R}^n$ утверждения

а) $\partial(\partial X) \subseteq \partial X$; б) $\partial(\partial(\partial X)) = \partial(\partial X)$.

II. Предел и непрерывность функции нескольких переменных (СЗ, §2)

Т.8. Найдите повторные пределы $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f$, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f$ и предел в точке

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f$ функции двух переменных, заданной выражением

а) $\frac{xy}{x^2 + y^2}$; б) $x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$; в) $(1 + xy^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$.

Т.9. Для функции $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ исследуйте существование предела в точке $(0, 0)$. Посчитайте пределы по всевозможным направлениям для этой функции в точке $(0, 0)$.

Т.10. Существует ли инъективная непрерывная функция $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$?

Т.11* Существует ли сюръективное непрерывное отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$?

III. Частные производные, дифференциал и формула Тейлора для функции нескольких переменных (СЗ, §§3,4)

Т.12. Исследуйте на дифференцируемость функции двух переменных в точке $(0, 0)$

а) $f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{y}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ б) $f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

в) $f(x, y) = \ln(1 + \sqrt[3]{x^2 y})$; г) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^4}$.

Т.13. Найдите частные производные f''_{xy} и f''_{yx} в точке $(0, 0)$ для функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Т.14. Найдите вторые частные производные функции в данной точке

а) $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/z}$, $(x, y, z) = (1, 1, 1)$;

б) $f(x, y, z) = (1 + x)^\alpha (1 + y)^\beta (1 + z)^\gamma$, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, α, β, γ — константы.

T.15. Найдите вторые частные производные в точке $(1, 1)$ функции $f(x, y)$, заданной неявно соотношением

а) $ef = e^{x+y-f}$; б) $f^3 - 3xyf - 2 = 0, f(1, 1) = 2$.

T.16. Найдите частные производные всех порядков функции $f(x, y, z) = \ln(x + y + z)$.

T.17. Разложите функцию по формуле Тейлора второго порядка в точке $(0, 0)$ с остаточным членом в виде $o(x^2 + y^2)$ и в форме Лагранжа

а) $f(x, y) = (1 + x)^y$; б) $f(x, y) = e^x \cos y$.

IV. Числовые ряды (C2, §§13–15)

T.18. Найдите сумму ряда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2 + 5n - 6}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{n^2(n + 1)^2}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos \beta n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin \beta n$, a, β — константы, $|a| < 1$.

T.19. Исследуйте на сходимость и абсолютную сходимость числовой ряд в зависимости от параметров α и β

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\alpha n} n^\beta$.

T.20. Исследуйте на сходимость и абсолютную сходимость числовой ряд

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^{3/2}}\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2}{3n^2 + n^2 \sin \frac{\pi n}{3}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 5}{n^2 + 6}\right)^{n^3}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$;

ё) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin (\pi \sqrt{n^2 + 1})$.

T.21. Исследуйте на сходимость и абсолютную сходимость числовой ряд в зависимости от параметра α

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha} - \ln \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)\right)$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{n \ln^\alpha n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{(\sqrt{n} + \sin n)^\alpha}$.

T.22*. Докажите, что если последовательность положительных чисел (a_n) убывает и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 1–5 апреля)

I. Функциональные последовательности и ряды (С2, §§17,18)

Т.1. Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость на данных множествах функциональную последовательность (f_n)

а) $f_n(x) = n^2 \left(\frac{x}{n} - \operatorname{arctg} \frac{x}{n} \right)$ на $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$;

б) $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$ на $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$;

в) $f_n(x) = \operatorname{arctg} x^n$ на $(1, 2)$ и $(2, +\infty)$;

г) $f_n(x) = n \operatorname{arctg} \frac{x}{n}$ на $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$;

д) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ на $[0, 1]$; е) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ на $[0, 1]$.

Т.2. Исследуйте на сходимость и равномерную сходимость на данных множествах функциональные ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \sin x}{\sqrt{n+x}}$ на $(0, +\infty)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{n} \sin \frac{x}{n}$ на $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^2+x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}$ на $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^2}{n^4+x^4} \sin \frac{n}{x}$ на $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} x \sin \frac{1}{(xn)^2}$ на $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \ln nx}{n^2}$ на $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$.

Т.3. Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно в точках a и b , а каждая функция $u_n(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$, то этот ряд сходится равномерно на $[a, b]$.

Т.4. Докажите, что если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится равномерно по $x \in [0, +\infty)$.

Т.5. Докажите, что дзета-функция Римана $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ бесконечно дифференцируема на интервале $(1, +\infty)$.

T.6. Докажите, что если функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и имеет компактный носитель (равна нулю за пределами некоторого отрезка), а $t_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то последовательность функций

$$f_n(x) = f(x - t_n)$$

равномерно стремится к f .

T.7*. Пусть последовательность неотрицательных непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций (f_n) убывает по n и поточечно стремится к нулевой функции. Докажите, что на самом деле (f_n) сходится равномерно.

II. Степенные ряды и ряд Тейлора (C2, §§20,21)

T.8. Найдите радиус сходимости степенного ряда

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!z^n}{n^n}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 z^n}{(2n)!}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(1-i)^n}.$$

T.9. Найдите радиус сходимости степенного ряда и исследуйте сходимость на концах интервала сходимости

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) x^n, a > 0; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

T.10. Разложите функцию в ряд Тейлора в данной точке x_0 и найдите радиус сходимости

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{1}{x^2 - 2x - 3}, x_0 = 0; \text{ б) } \frac{1}{(x^2 + 2)^2}, x_0 = 0; \text{ в) } \ln \frac{2 + x^2}{\sqrt{1 - 2x^2}}, x_0 = 0; \\ \text{г) } & \sin^3 x, x_0 = 0; \text{ д) } \operatorname{arctg} \frac{2 - x}{1 + 2x}, x_0 = 0; \text{ е) } \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}, x_0 = 2. \end{aligned}$$

T.11. Найдите сумму степенного ряда

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} nx^n; \text{ б) } \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n.$$

T.12. Докажите, что ряд Маклорена функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

имеет бесконечный радиус сходимости, но не везде сходится к этой функции.

III. Интеграл функции одной переменной (C2, §6)

T.13. Вычислите интегралы как пределы интегральных сумм

$$\text{а) } \int_0^1 e^x dx; \text{ б) } \int_0^\pi \sin x dx.$$

T.14. Найдите интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ и с его помощью докажите равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

T.15. Объясните, почему неверно равенство $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_{-1}^1 = 0$.

T.16. Докажите, что для чётной интегрируемой функции $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$, а для нечётной f выполняется $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

T.17. Докажите неравенства для интегралов

а) $1 - \frac{1}{n} < \int_0^1 e^{-x^n} dx < 1$ при $n \in \mathbb{N}$;

б) $\int_0^{\pi/2} e^{-a \sin x} dx < \frac{\pi}{2a} (1 - e^{-a})$ при $a > 0$;

в) $\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{a}$, где $b > a > 0$.

T.18. Докажите, что если $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет период T и интегрируема на отрезке $[0, T]$, то для любого $a \in \mathbb{R}$ выполняется

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

T.19. Докажите, что $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся непрерывные $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, такие что $g \leq f \leq h$ и $\int_a^b (h(x) - g(x)) dx < \varepsilon$.

IV. Мера элементарных множеств и мера Жордана

T.20. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ и $T \subset \mathbb{R}^m$ — элементарные множества. Докажите, что для их декартова произведения $S \times T \subset \mathbb{R}^{n+m}$ выполняется $m(S \times T) = mS \cdot mT$.

T.21. Может ли счётное множество $X \subseteq \mathbb{R}$ иметь нулевую меру Жордана?

T.22. Может ли счётное множество $X \subseteq \mathbb{R}$ иметь положительную меру Жордана?

T.23. Всякое ли компактное подмножество \mathbb{R} измеримо по Жордану?

V. Мера Лебега и её свойства

T.24. Пусть X — это множество рациональных точек квадрата $[0, 1]^2$. Измеримо ли оно по Жордану? Измеримо ли оно по Лебегу?

T.25. Пусть X — это множество точек плоскости \mathbb{R}^2 , имеющих хотя бы одну рациональную координату. Измеримо ли оно по Лебегу?

T.26. Приведите пример замкнутого подмножества отрезка $[0, 1]$, состоящего только из иррациональных чисел и имеющего меру Лебега не менее $0,999$.

T.27. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет Лебегову меру нуль, функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Докажите, что $f(A)$ тоже имеет Лебегову меру нуль.

T.28*. Докажите, что утверждение предыдущей задачи будет неверно, если заменить непрерывную дифференцируемость f на непрерывность.

T.29. Докажите, что если $X \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу с конечной мерой, то мера $\mu(X \setminus (X + t))$ стремится к нулю при $t \rightarrow 0$. Здесь $X + t$ — это сдвиг множества X на t .

T.30. Докажите, что мера Лебега любого открытого множества равна его нижней мере Жордана.

T.31. Докажите, что мера Лебега любого компактного множества равна его верхней мере Жордана.

T.32. Пусть X_k — последовательность измеримых по Лебегу подмножеств \mathbb{R} , а X — множество таких точек $x \in \mathbb{R}$, для которых включение $x \in X_k$ выполняется для чётных k и нарушается для нечётных k . Докажите, что X измеримо по Лебегу.

T.33. Докажите, что у произвольной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ множество точек разрыва измеримо по Лебегу.

VI. Измеримые функции

T.34. Докажите, что функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ измерима по Лебегу тогда и только тогда, когда для всякого рационального $r \in \mathbb{Q}$ множество

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}$$

измеримо.

Т.35. Докажите, что если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ измерима по Лебегу, то её график имеет меру Лебега нуль на плоскости.

Т.36. Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема везде. Докажите, что её производная измерима по Лебегу.

34 + 2*

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 6–15 мая)

I. Абсолютно и условно сходящиеся интегралы функции одной переменной (С2, §§11,12)

Т.1. Исследуйте интегралы на сходимость и абсолютную сходимость в зависимости от параметра $\alpha \in \mathbb{R}$

а) $\int_0^1 \frac{\operatorname{ch} \alpha x - \ln(1+x^2) - 1}{\sqrt[3]{8-x^3} - 2} dx$; б) $\int_0^1 \frac{\ln^\alpha \operatorname{ch} \frac{1}{x}}{\ln(1+x)} dx$; в) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x+x^\alpha)}{x \ln^\alpha(1+x)} dx$.

Т.2. Исследуйте интегралы на сходимость и абсолютную сходимость в зависимости от параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

а) $\int_0^1 x^\alpha |\ln x|^\beta dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x dx$; в) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$.

Т.3. Исследуйте интегралы на сходимость и абсолютную сходимость в зависимости от параметра $\alpha \in \mathbb{R}$

а) $\int_0^{+\infty} x^{4\alpha/3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{1+x^\alpha} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x+x^\alpha)}{x^{3/2}} dx$; в) $\int_0^{+\infty} x^2 \sin \frac{\cos x^3}{x+1} dx$;
 г) $\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$; д) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{(2x - \cos \ln x)^\alpha} dx$; е) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 \cos x^3}{(3x - \operatorname{arctg} x)^\alpha} dx$;
 ё) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^\alpha} dx$; ж) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{(\sqrt{x} + \sin x)^\alpha} dx$.

Т.4. Найдите явное асимптотически эквивалентное выражение для интеграла

$$\int_x^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2/2} dt$$

при $x \rightarrow +\infty$ в зависимости от параметра α .

Т.5. Определён ли интеграл по прямой как интеграл Лебега

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$?

II. Вычисление и приложения интеграла Лебега (C2, §§7,8)

T.6. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми

а) $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}$, $x = 1$, $y = 0$; б) $y = \ln x$, $y = \ln \frac{1}{x}$, $x = 0$.

T.7. Найдите длину кривой

а) $y = \ln \sin x$, $\pi/3 \leq x \leq 2\pi/3$; б) $y = t - \sin t$, $x = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq \pi$;
в) $r = 1 - \cos \varphi$ в полярных координатах.

T.8. Найдите объём тела вращения, заданного неравенствами

а) $\sqrt{y^2 + z^2} \leq \sqrt{x}e^{-x}$, $0 \leq x \leq +\infty$;
б) $a(y^2 + z^2) \leq x \leq b + c(x^2 + y^2)$, $a > c$ и $b > 0$ — константы.

T.9. Пусть $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — положительно определённая квадратичная форма. Докажите формулу

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)} dx_1 \dots dx_n = \pi^{n/2} \cdot (\det Q)^{-1/2}.$$

T.10. Посчитайте интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|} dx_1 \dots dx_n.$$

T.11. Напишите асимптотически эквивалентную формулу для двойного факториала

$$(2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)$$

при $n \rightarrow \infty$ без факториалов и гамма-функций.

T.12. Докажите формулу

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

III. Свойства интеграла Лебега

T.13. Докажите формулу включений-исключений для множеств $X_1, \dots, X_N \subseteq \mathbb{R}^n$ конечной меры

$$\mu(X_1 \cup \dots \cup X_N) = \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu(X_{i_1} \cap \dots \cap X_{i_k}).$$

T.14. Найдите интеграл Лебега функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, заданной как

$$f(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

T.15. Верно ли, что если f имеет первообразную на отрезке $[a, b]$, то f интегрируема по Лебегу на отрезке $[a, b]$ с конечным интегралом?

T.16. Докажите, что если $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, дифференцируема на (a, b) , и её производная ограничена, то

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$

T.17. Докажите, что если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу с конечным интегралом, то

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)| dx = 0.$$

T.18. Постройте последовательность функций $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которая возрастает по n ,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = +\infty \text{ и для любого } n \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = -\infty.$$

T.19. Пусть f интегрируема по Лебегу на \mathbb{R}^n с конечным интегралом. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что если $X \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и $\mu(X) < \delta$, то

$$\int_X |f(x)| dx < \varepsilon.$$

T.20*. Приведите пример непрерывной и непостоянной на отрезке функции, у которой производная почти всюду (по мере Лебега) существует и почти всюду равна нулю. Покажите, что для неё и её производной не выполняется формула Ньютона-Лейбница.

IV. Сравнение интеграла Римана и интеграла Лебега

T.21. Докажите, что интегрируемая по Риману на отрезке функция интегрируема и по Лебегу с тем же интегралом.

T.22. Пусть последовательность непрерывных функций $f_n: [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ убывает по n и стремится к нулю в среднем. Докажите, что эта последовательность функций стремится к нулю почти всюду.

Т.23*. Докажите, что $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена и множество её точек разрыва имеет меру Лебега нуль.

21 + 2*

Составитель задания:

д. ф.-м. н., профессор Р. Н. Карасёв