

**ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
ПОТОК Р.Н. КАРАСЁВА**

1-й СЕМЕСТР

- (1) Предел последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности.
- (2) Переход к пределу в неравенствах.
- (3) Теоремы о пределе монотонной последовательности.
- (4) Неравенство Бернулли и число e .
- (5) Бесконечно малые последовательности и их свойства. Предел суммы, разности, произведения и частного.
- (6) Степени с рациональными и действительными показателями. Логарифмы.
- (7) Теорема Кантора о вложенных отрезках.
- (8) Теорема Больцано-Вейерштрасса. Частичные пределы.
- (9) Критерий Коши сходимости последовательности.
- (10) Точные грани числовых множеств: определение, существование и единственность.
- (11) Лемма Гейне–Бореля о покрытии отрезка интервалами.
- (12) Теоремы о счётности множества \mathbb{Q} рациональных чисел и несчётности множества \mathbb{R} действительных чисел.
- (13) Тригонометрические функции. Неравенства $|\sin \alpha| < |\alpha| < |\operatorname{tg} \alpha|$ при $0 < |\alpha| < \frac{\pi}{2}$.
- (14) Два определения предела функции (по Коши и по Гейне). Их эквивалентность.
- (15) Свойства пределов функций, связанные с неравенствами и арифметическими операциями.
- (16) Односторонние пределы. Теорема об односторонних пределах монотонных функций.
- (17) Критерий Коши существования предела функции.
- (18) Непрерывность функции в точке. Разрывы первого и второго рода. Непрерывность суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций.
- (19) Теорема о непрерывности сложной функции.
- (20) Свойства функций, непрерывных на ограниченных замкнутых множествах.
- (21) Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.
- (22) Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.
- (23) Непрерывность показательной, логарифмической и степенной функций.
- (24) Непрерывность тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

- (25) Определение и геометрический смысл производной. Производные функций $\sin x$, $\cos x$, a^x , $\log_a x$.
- (26) Линейное приближение и дифференциал функции. Непрерывность дифференцируемой функции. Критерий дифференцируемости.
- (27) Производная суммы, разности, произведения и частного.
- (28) Производная сложной функции. Производная функции x^α . Инвариантность формы первого дифференциала.
- (29) Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций. Производная функции, заданной параметрически.
- (30) Формула Лейбница для n -й производной произведения двух функций.
- (31) Локальные экстремумы. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля.
- (32) Теоремы Лагранжа и Коши о среднем значении.
- (33) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
- (34) Разложения по формуле Тейлора элементарных функций: e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.
- (35) Первообразные и неопределённые интегралы. Методы интегрирования по частям и заменой переменной.
- (36) Правило Лопиталю раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$.
- (37) Правило Лопиталю раскрытия неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty}$.
- (38) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
- (39) Единственность асимптотического разложения функции по степеням $x-x_0$ при $x \rightarrow x_0$.
- (40) Условия постоянства, возрастания и убывания дифференцируемой функции.
- (41) Необходимые и достаточные условия экстремума дифференцируемой функции.
- (42) Интервалы выпуклости функции. Достаточные условия выпуклости вниз (вверх) дифференцируемой функции.
- (43) Точки выпуклости и точки перегиба. Необходимые и достаточные условия точки перегиба.
- (44) Непрерывные и дифференцируемые векторные функции и параметрически заданные кривые. Касательная к кривой.
- (45) Определение и свойство аддитивности длины дуги кривой.
- (46) Спряmlяемость непрерывно дифференцируемой кривой. Производная длины дуги по параметру и её физический смысл.
- (47) Кривизна и формулы Френе для плоской кривой. Радиус кривизны, центр кривизны и эволюта.
- (48) Кривизна, главная нормаль и соприкасающаяся плоскость пространственной кривой.

2-й СЕМЕСТР

- (1) Евклидовы n -мерные пространства. Неравенства Коши–Шварца и треугольника. Пределы последовательностей точек евклидова пространства.
- (2) Открытые и замкнутые множества в евклидовом пространстве и их свойства. Круглые и кубические окрестности. Внутренность, замыкание и граница множества. Связные и линейно связные множества.
- (3) Последовательности вложенных параллелепипедов в евклидовом пространстве. Существование частичного предела последовательности точек.
- (4) Компакты. Критерий компактности в евклидовом пространстве.
- (5) Числовые функции нескольких переменных. Функции точки и отображения.
- (6) Предел функции в точке и на бесконечности. Повторные пределы.
- (7) Непрерывные функции и отображения. Топологическое определение непрерывности. Свойства функций и отображений, непрерывных в точке, на компакте, на связных и линейно связных множествах.
- (8) Равномерно непрерывные функции, модуль непрерывности. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте. Равномерно непрерывные отображения.
- (9) Дифференцируемые функции. Полный дифференциал. Частные производные. Достаточное условие дифференцируемости функции в точке. Дифференцирование сложной функции. Производная по направлению и градиент функции.
- (10) Производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о независимости смешанной производной от порядка дифференцирования. Формула Тейлора для функций нескольких переменных.
- (11) Мера Жордана подмножеств евклидова пространства. Теоремы об измеримости объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Критерий измеримости ограниченного множества.
- (12) Интегральные суммы и интеграл Римана. Теорема об ограниченности интегрируемой функции. Критерий интегрируемости функции.
- (13) Связь меры Жордана криволинейной трапеции с интегралом.
- (14) Интеграл Римана и последовательность разбиений, мелкость которых стремится к нулю.
- (15) Свойства интегрируемых функций: связь интегрируемости на промежутке с интегрируемостью на его частях, интегрируемость модуля, суммы, разности и произведения интегрируемых функций.
- (16) Классы интегрируемых функций: непрерывные и кусочно непрерывные, монотонные и кусочно монотонные.
- (17) Свойства определённого интеграла: линейность, аддитивность, монотонность. Первая теорема о среднем.
- (18) * Вторая теорема о среднем.
- (19) Интегрируемость сложной функции и теорема о замене переменной в определённом интеграле.
- (20) Интегралы по ориентированным промежуткам и их свойства.

- (21) Интегралы с переменным верхним пределом. Непрерывность и дифференцируемость интеграла по верхнему пределу. Существование первообразной у непрерывной функции.
- (22) Формула Ньютона–Лейбница. Интегрирование по частям. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
- (23) Несобственные интегралы, определение и основные свойства: линейность, монотонность, замена переменной интегрирования. Формула Ньютона–Лейбница, интегрирование по частям.
- (24) Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признаки сравнения.
- (25) Абсолютно и условно сходящиеся интегралы. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.
- (26) Приложение определённого интеграла: площадь криволинейной трапеции, объём тела вращения и площадь его боковой поверхности, длина дуги кривой.
- (27) Криволинейные интегралы первого и второго рода: определения, основные свойства и формулы.
- (28) Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования и существование потенциала.
- (29) * Условия существования потенциала векторного поля локально и в односвязной области.
- (30) Последовательности и ряды с комплексными членами. Необходимое условие сходимости ряда.
- (31) Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами: признаки сравнения, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак.
- (32) Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.
- (33) Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства: перестановка членов абсолютно и условно сходящихся рядов и теорема о перемножении абсолютно сходящихся рядов.
- (34) Признаки Дирихле и Абеля сходимости числовых рядов.
- (35) Сходящиеся и равномерно сходящиеся функциональные последовательности и ряды. Критерий Коши. Необходимое условие равномерной сходимости ряда.
- (36) Теорема о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда.
- (37) Теорема о предельном переходе под знаком интеграла. Почленное интегрирование функциональных рядов.
- (38) Теорема о производной предела последовательности дифференцируемых функций. Почленное дифференцирование функциональных рядов.
- (39) Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.
- (40) Теорема Абеля о сходимости степенного ряда, радиус сходимости степенного ряда. Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
- (41) Равномерная сходимость степенных рядов внутри и на границе круга сходимости. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.

- (42) Аналитические функции. Аналитичность суммы, произведения и частного аналитических функций. Аналитичность функции в других точках круга сходимости.
- (43) Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Разложение функций e^x , $\sin x$, $\cos x$ в степенные ряды.
- (44) Разложение функций $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, $(1+x)^\alpha$ в степенные ряды.
- (45) * Связь аналитичности функции и её дифференцируемости в комплексном смысле.

3-й СЕМЕСТР

- (1) Теоремы о существовании, единственности, непрерывности и дифференцируемости неявной функции, определяемой одним уравнением.
- (2) Теоремы о существовании, единственности, непрерывности и дифференцируемости неявных функций, определяемых системой уравнений (случай гладких уравнений).
- (3) Гладкие отображения областей в евклидовом пространстве. Дифференциал и матрица Якоби, их свойства. Якобиан отображения, его свойства.
- (4) Теорема о существовании обратного отображения. Принцип сохранения области.
- (5) * Теорема о расщеплении гладкого отображения на простые гладкие отображения.
- (6) Зависимые и независимые системы функций. Достаточное условие независимости системы гладких функций. Достаточное условие локальной зависимости системы гладких функций.
- (7) Локальные максимумы и минимумы функций многих переменных. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Критические точки функции.
- (8) Необходимые и достаточные условия экстремума дважды непрерывно дифференцируемых функций.
- (9) Условные экстремумы. Необходимое условие условного экстремума. Метод множителей Лагранжа.
- (10) Необходимые и достаточные условия условного экстремума в случае, когда функция и уравнения связи дважды непрерывно дифференцируемы.
- (11) Разбиения измеримого множества, интегральные суммы и их свойства. Определение интеграла Римана.
- (12) Критерии интегрируемости через интегральные суммы и суммы колебаний.
- (13) Последовательности разбиений, мелкость которых стремится к нулю. Пределы соответствующих интегральных сумм.
- (14) Интегрируемость непрерывных функций на компактах и измеримых множествах.
- (15) * Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.
- (16) Теоремы о среднем для кратных интегралов.
- (17) Теоремы о сведении кратного интеграла к повторному.
- (18) Связь меры под графиком неотрицательной функции и интеграла этой функции.
- (19) Измеримость и формула для меры образа измеримого множества при отображении, меняющем только одну переменную.
- (20) Замена переменных в кратном интеграле для случая, когда меняется одна переменная.
- (21) Замена переменных в кратном интеграле для общего случая.

- (22) Поверхности в \mathbb{R}^3 . Поверхности, заданные параметрически и неявно. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, формулы для их нахождения и зависимость от параметризации.
- (23) Площадь поверхности по Минковскому. Формула для вычисления площади дважды непрерывно дифференцируемой параметризованной поверхности с кусочно гладким краем.
- (24) Интеграл первого рода по поверхности. Формула для интеграла первого рода по параметрически заданной поверхности. Интегрируемость непрерывной функции по поверхности.
- (25) Формула Грина. Доказательство для области, элементарной относительно всех координатных осей. Замена переменных в формуле Грина. Согласованная ориентация границы области.
- (26) Вычисление площади плоских фигур с помощью криволинейных интегралов. Геометрический смысл знака якобиана отображения на плоскости.
- (27) Ориентация параметрически заданной гладкой поверхности, ориентация с помощью нормали. Интегралы 2-го рода по поверхности, формулы для их вычисления.
- (28) Согласованные ориентации параметрически заданной гладкой поверхности и её границы. Формула Стокса для гладкой параметрически заданной поверхности.
- (29) Ориентация кусочно гладкой поверхности, интегралы 2-го рода и формула Стокса для кусочно гладких поверхностей.
- (30) Формула Остроградского–Гаусса. Доказательство для областей, элементарных относительно всех координатных осей.
- (31) Дифференциальные операторы grad , rot , div в \mathbb{R}^3 . Их выражение через символ ∇ . Геометрическое определение градиента.
- (32) Ротор векторного поля и формула Стокса. Геометрическое определение ротора и его зависимость от выбора ортогональной системы координат.
- (33) Дивергенция векторного поля и формула Остроградского–Гаусса. Геометрическое определение дивергенции, её независимость от ортонормированной системы координат.
- (34) Соленоидальные векторные поля. Определения соленоидальности в дифференциальной и интегральной форме. Векторный потенциал.

4-й СЕМЕСТР

- (1) Ортогональные и ортонормированные системы функций. Ряды Фурье по ортогональным системам функций. Абсолютно интегрируемые и интегрируемые с квадратом функции.
- (2) Тригонометрические ряды Фурье. Комплексная формы тригонометрических рядов Фурье. Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье, ядро Дирихле.
- (3) Теорема об аппроксимации (в среднем) абсолютно интегрируемых функций ступенчатыми. Теорема Римана об осцилляции и её следствия. Принцип локализации для рядов Фурье.
- (4) Порядок убывания коэффициентов Фурье дифференцируемых и кусочно дифференцируемых функций.
- (5) Признак Липшица сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.
- (6) Признак Дини сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.
- (7) Признак Дирихле сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.
- (8) Признаки равномерной сходимости тригонометрических рядов Фурье дифференцируемых и кусочно дифференцируемых функций.
- (9) Признаки Липшица, Дини и Дирихле равномерной сходимости тригонометрических рядов Фурье.
- (10) Почленное дифференцирование и интегрирование тригонометрических рядов Фурье.
- (11) Теорема Фейера о суммировании тригонометрического ряда Фурье методом средних арифметических.
- (12) Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
- (13) Полные и неполные системы в пространствах C и L_1 .
- (14) Пространства функций с интегрируемым квадратом L_2 .
- (15) Неравенство Бесселя и свойство минимальности коэффициентов Фурье по ортогональной системе функций в L_2 .
- (16) Полные системы в пространстве L_2 . Полнота тригонометрической системы и системы многочленов Лежандра.
- (17) Ряды Фурье функций из L_2 по ортогональным системам. Равенство Парсеваля.
- (18) Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость собственных интегралов, зависящих от параметра. Формула Лейбница.
- (19) Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра: признак Вейерштрасса, критерий Коши и признак Дирихле.
- (20) Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра: непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость.
- (21) Вычисление интегралов Дирихле и Лапласа.
- (22) Теорема о перестановке несобственных интегралов для неотрицательной функции.

- (23) Свойства гамма и бета функций, выражение бета функции через гамма функцию. Формула дополнения.
- (24) Представление функций интегралом Фурье. Признаки сходимости интеграла Фурье для абсолютно интегрируемой функции: признак Дини и признак Дирихле.
- (25) Комплексная форма интеграла Фурье. Преобразование Фурье и формулы обращения.
- (26) Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
- (27) Пространство S и его инвариантность при преобразовании Фурье.
- (28) Ортогональность преобразования Фурье относительно скалярного произведения L_2 .
- (29) Свёртка функций, свёртка с дельтаобразными последовательностями функций. Свёртка и преобразование Фурье.
- (30) Применение свёртки для приближения непрерывных функций нескольких переменных гладкими, и непрерывных на компакте функций многочленами.
- (31) Преобразование Фурье функций нескольких переменных. Достаточные условия для справедливости формулы обращения.
- (32) Метрические пространства, их топология. Полнота метрического пространства и его пополнение. Компактные подмножества в полном метрическом пространстве и вполне ограниченность.
- (33) Определение и примеры линейных нормированных пространств. Банаховы пространства. Полнота пространства $C[a, b]$. Компактные множества в пространстве $C[a, b]$
- (34) Двойственное пространство к банаховому пространству, его сильная и слабая топология. Компактность единичного шара в слабой топологии.
- (35) Теорема Бэра и принцип равномерной ограниченности в банаховых пространствах.
- (36) Существование непрерывной 2π -периодической функции, ряд Фурье которой расходится в одной точке.
- (37) Пространства со скалярным произведением. Евклидовы и гильбертовы пространства. Унитарные пространства.
- (38) Ряды Фурье в евклидовом пространстве. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля–Стеклова. Замкнутость ортонормированной системы в гильбертовом пространстве.
- (39) Метрическая проекция в гильбертовом пространстве. Описание непрерывных линейных функционалов в гильбертовом пространстве.
- (40) Линейное пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций и пространство D . Пространство D^* обобщённых функций. Сходимость в пространстве D^* .
- (41) Дифференцирование обобщённых функций и их умножение на бесконечно дифференцируемые функции. Непрерывность этих операций в D^* .
- (42) Пространство S^* обобщённых функций, преобразование Фурье обобщённых функций из S^* .