СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
21 ДЕКАБРЯ 2025 ГОДА

1. Докажите, что для любого $x \in (0,1)$ верно неравенство

$$\sqrt{1+x}\ln(1+x) + \sqrt{1-x}\ln(1-x) > 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ и найдём её вторую и четвёртую производную

$$f''(x) = -\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{16 - 15\ln x}{16x^3\sqrt{x}}.$$

Заметим, что четвёртая производная на интервале $(0,2)$ неотрицательна. Тогда для чётной функции из условия задачи

$$g(x) = f(1-x) + f(1+x)$$

верно, что при $x = 0$ обращаются в нуль она сама и её производные вплоть до третьей, а четвёртая производная положительна при $x \in [0,1)$. Так что неравенство из условия получается интегрированием верного неравенства

$$g^{(4)}(x) = f^{(4)}(1-x) + f^{(4)}(1+x) > 0$$

четыре раза.

2. Найдите все бесконечно дифференцируемые функции $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{d}{dx}f(e^x) = \frac{1}{2}e^x f(e^{-x})$$

при любых $x \in \mathbb{R}$.

Ответ: $f(x) = C\sqrt{x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Решение. Выпишем то же уравнение с заменой $x \mapsto -x$:

$$\frac{d}{dx}f(e^{-x}) = -\frac{1}{2}e^{-x}f(e^x).$$

Продифференцируем теперь исходное уравнение ещё раз, применив его вариант с заменой:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(e^x) = \frac{1}{2}e^x f(e^{-x}) + \frac{1}{2}e^x\frac{d}{dx}f(e^{-x}) = \frac{d}{dx}f(e^x) - \frac{1}{2}e^x\left(\frac{1}{2}e^{-x}f(e^x)\right).$$

Получается, что функция $g(x) = f(e^x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$g'' - g' + \frac{1}{4}g = 0,$$

решением которого является $g(x) = f(e^x) = e^{x/2}(C + Dx)$. После постановки в исходное уравнение становится ясно, что $D = 0$, а C может быть произвольным.

3. Существует ли при каком-либо натуральном n отображение $f : (0,1) \to \mathbb{R}^n$, такое что для любых $s,t \in (0,1)$ выполняется

$$f(s)\cdot f(t) = \frac{1}{1-st}?$$

Ответ: не существует.

Решение. Рассмотрим какие-то N различных чисел $s_1,\dots,s_N \in (0,1)$. Матрица G с компонентами $f(s_i)\cdot f(s_j)$ тогда является матрицей Грама системы N векторов в $\mathbb{R}^n$, и следовательно, является неотрицательно определённой матрицей $N\times N$ ранга не более n.

По условию, эта матрица также может быть записана как

$$\frac{1}{1-s_is_j} = \sum_{k=0}^{\infty} s_i^k s_j^k.$$

В этой сумме каждое слагаемое, рассматриваемое как матрица, имеет вид $S_kS_k^T$, где S_k — столбец с координатами s_i^k. То есть все слагаемые неотрицательно определены. Отсюда следует, что G неотрицательно определена. Покажем, что на самом деле G положительно определена, что даст противоречие с неравенством $\operatorname{rk} G \le n$ при $N > n$.

Вектор X из ядра G, $X^TGX = 0$, должен лежать в ядре каждой матрицы $S_kS_k^T$,

$$X^TS_kS_k^TX = (X^TS_k)^2 = 0 \Rightarrow X^TS_k = 0.$$

В явном виде эти условия переписываются как

$$s_1^kx_1 + \dots + s_N^kx_N = 0$$

В силу свойств определителя Вандермонда, такие равенства для $k = 0,\dots,N-1$ уже означают, что $X = 0$, что доказывает положительную определённость G.

Набросок другого рассуждения. С помощью сведений о делимости многочленов от нескольких переменных можно заметить, что определитель матрицы Грама является ненулевой рациональной функцией от $s_1,\dots,s_N$. А следовательно, при каких-то конкретных значениях $s_1,\dots,s_N \in (0,1)$ он ненулевой, что доказывает неравенство $n \ge N$.

4. Плоскую фигуру удалось разрезать на n квадратов со сторонами $1, \frac{11}{10}, \dots, \left(\frac{11}{10}\right)^{n-1}$, параллельными осям координат. Докажите, что эту фигуру нельзя разрезать на менее чем n прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

Решение. Пусть $I_1, I_2,\dots,I_n$ — отрезки, являющиеся проекциями всех квадратов на ось Ox.

Докажем, что характеристические функции $\{\chi_{I_k}\}$ этих отрезков линейно независимы как элементы $L^2(\mathbb{R})$. Предположим противное, тогда для некоторого $m\in\mathbb{N}$ и некоторого семейства $\{J_1,\dots,J_m\} \subset \{I_1,\dots,I_n\}$ верно

$$\alpha_1\chi_{J_1}(x) + \ldots + \alpha_m\chi_{J_m}(x) = 0 \qquad \text{почти всюду} \tag{1}$$

с ненулевыми коэффициентами α_i.

Рассмотрим граф, вершины которого — концы отрезков J_i, а рёбра — сами эти отрезки. Если в этом графе есть цикл, то сумма длин рёбер в этом цикле, взятых с подходящими знаками, равна нулю. Однако это невозможно, поскольку $\frac{11}{10}$ не является корнем нетривиального многочлена с коэффициентами из $\{-1, 0, 1\}$. Таким образом, наш граф является лесом и, следовательно, в нём есть вершина степени 1. Пусть это конец отрезка J_k. Тогда в достаточно малой окрестности этой точки все слагаемые в левой части (1), кроме k-го, постоянны, в то время как k-е слагаемое имеет разные односторонние пределы (различающиеся на $|\alpha_k|$). Так что линейной зависимости нет.

Аналогично, характеристические функции проекций отрезков на ось Oy линейно независимы в смысле $L_1(\mathbb{R})$.

Пусть теперь $f_i(x, y) = g_i(x) \cdot h_i(y)$ — характеристическая функция i-го квадрата, где g_i, h_i — характеристические функции проекций его сторон на оси. Обозначим также через $\chi(x, y)$ характеристическую функцию всей нашей фигуры. Она почти всюду является суммой характеристических функций квадратов. Используя включение $L_1(\mathbb{R}) \otimes L_1(\mathbb{R}) \subset L_1(\mathbb{R}^2)$, $f \otimes g \mapsto f(x)g(y)$, можно написать

$$\chi = \sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes h_i.$$

В последней сумме все первые сомножители $\{g_i\}$ линейно независимы, а также все вторые сомножители $\{h_i\}$ линейно независимы. Отсюда следует, что тензорный ранг $\chi \in L_1(\mathbb{R}) \otimes L_1(\mathbb{R})$ равен n.

Пусть теперь фигура разрезана на m прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Тогда χ представляется в виде суммы не более m тензорных произведений (на этот раз в них могут быть линейные зависимости), из чего следует, что $m \geqslant n$.

Замечание 1. Используемые свойства тензорного ранга и неравенство $m \geqslant n$ легко понять, если рассмотреть в $L_1(\mathbb{R})$ конечномерное линейное пространство V, натянутое на все интересующие нас характеристические функции от координаты x и конечномерное линейное пространство W, натянутое на все интересующие нас характеристические функции от координаты y. Тензоры в $V \otimes W \subset L_1(\mathbb{R}^2)$ тогда можно считать просто матрицами в паре базисов этих пространств. Тогда тензорный ранг — это просто ранг матрицы, не меняющийся при домножении этой матрицы слева или справа на обратимые матрицы, то есть при замене координат в V и W.

Замечание 2. При выводе можно не предполагать, что стороны прямоугольников параллельны осям координат. Действительно, все отрезки границы фигуры параллельны осям координат, и примыкающие к границе прямоугольники разбиения должны иметь стороны, параллельные осям. Убрав из фигуры примыкающие к границе прямоугольники, мы получим меньшую фигуру с параллельными осям координат отрезками границы, к которой можно применить предположение индукции и утверждать, что все составляющие её треугольники имеют стороны, параллельные осям координат.