СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
21 ДЕКАБРЯ 2025 ГОДА

1. Докажите, что для любого $x \in (0,1)$ верно неравенство

$$\sqrt{1+x}\ln(1+x) + \sqrt{1-x}\ln(1-x) > 0.$$

2. Найдите все бесконечно дифференцируемые функции $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{d}{dx} f(e^x) = \frac{1}{2} e^x f(e^{-x})$$

при любых $x \in \mathbb{R}$.

3. Существует ли при каком-либо натуральном n отображение $f : (0,1) \to \mathbb{R}^n$, такое что для любых $s, t \in (0,1)$ выполняется

$$f(s) \cdot f(t) = \frac{1}{1 - st}?$$

4. Плоскую фигуру удалось разрезать на n квадратов со сторонами $1, \frac{11}{10}, \ldots, \left(\frac{11}{10}\right)^{n-1}$, параллельными осям координат. Докажите, что эту фигуру нельзя разрезать на менее чем n прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.