СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
08 ДЕКАБРЯ 2024 ГОДА

1. Пусть мультипликативная группа F^* поля F оказалась конечно порождённой. Верно ли, что F^* циклическая?

Ответ: верно.

Решение. Будем использовать следующий факт: если H — свободная подгруппа конечно порожденной абелевой группы G, то образующих в H не больше, чем в G. Предположив противное, заметим, что $H\otimes\mathbb{Q} \to G\otimes\mathbb{Q}$ будет отображением векторных пространств над $\mathbb{Q}$ с нетривиальным ядром, а любой элемент ядра этого отображения после домножения на общий знаменатель даст соотношение между образующими H — противоречие.

Теперь посмотрим на характеристику F. Если она нулевая, то F содержит подполе, изоморфное $\mathbb{Q}$, а значит, мультипликативная группа F^* содержит свободную группу из бесконечного числа образующих (простых чисел), что с учётом вышеуказанного факта противоречит конечной порождённости в условии задачи.

Пусть характеристика F является простым числом p. Если F содержит трансцендентный над $\mathbb{F}_p$ элемент x, то порождённое им подполе изоморфно полю рациональных функций $\mathbb{F}_p(x)$, а значит, мультипликативная группа F^* содержит свободную группу $\mathbb{F}_p(x)^*$ с бесконечным числом образующих, соответствующих неприводимым над $\mathbb{F}_p$ многочленам. Получается, что все элементы поля F, и в частности все образующие группы F^*, удовлетворяют некоторым полиномиальным соотношениям над $\mathbb{F}_p$, откуда следует, что F — конечное расширение $\mathbb{F}_p$. Известно, что тогда F^* состоит в точности из корней уравнения $x^{p^k-1} = 1$, а также известно, что корни данной степени из единицы в любом поле составляют циклическую группу.

2. Пусть A и B — матрицы 2×2 с комплексными элементами. Докажите, что

$$\operatorname{tr} AAABBABAABBB = \operatorname{tr} BBBAABABBAAA.$$

Решение. Заметим, что левая и правая части равенства являются многочленами от элементов матриц A и B, то есть непрерывно зависят от A и B. Так как любую матрицу A можно представить в виде предела последовательности матриц с различными собственными значениями, то достаточно доказать формулу для матриц A, которые имеют различные собственные значения.

В подходящем базисе A будет диагональной, а B будет иметь вид $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. По тем же соображениям непрерывности достаточно рассмотреть случай, когда b_{12} и b_{21} ненулевые.

Сопряжение матрицей $S = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$ не меняет A и превращает B в

$$SBS^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & x^2 b_{12} \\ x^{-2} b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

При выборе $x = \sqrt{b_{21}/b_{12}}$ (можно выбрать любой комплексный корень) получается

$$SBS^{-1} = B^T.$$

Также тривиально из диагональности матрицы A

$$SAS^{-1} = A = A^T.$$

Тогда можно написать

$$\operatorname{tr} AAABBABAABBB = \operatorname{tr} SAAABBABAABBBS^{-1} = \operatorname{tr} AAAB^TB^TAB^TAAB^TB^TB^T = \\ = \operatorname{tr}(AAAB^TB^TAB^TAAB^TB^TB^T)^T = \operatorname{tr} BBBAABABBAAA.$$

3. Существует ли непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая что в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ выполняется

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} = +\infty?$$

Ответ: нет.

Решение. На отрезке $[0, 1]$ функция f тогда ограничена и, умножив её на ненулевую константу, можно считать, что $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$. Далее рассмотрим сужение f на отрезок $[0, 1]$ вместо f и получим противоречие для него.

Для всякого $y \in f([0, 1])$ прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из изолированных точек в силу того, что

$$|x - x_0| = o(|f(x) - f(x_0)|) \quad x \to x_0. \tag{1}$$

На отрезке $[0, 1]$ в силу его компактности точек множества $f^{-1}(y)$ тогда будет конечное число, пусть это точки $x_1, \dots, x_m$. Пусть $U(x_1), \dots, U(x_m)$ — их попарно непересекающиеся окрестности, такие что в любой из них, $U(x_i)$, по условию задачи выполняется

$$|x - x_i| \le \frac{1}{4m}|f(x) - f(x_0)|.$$

Дополнение $C = [0, 1] \setminus (U(x_1) \sqcup \dots \sqcup U(x_m))$ компактно, следовательно, его образ компактен и не содержит точки y. Значит, можно выбрать окрестность $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ так, что её прообраз $f^{-1}(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ будет содержаться в объединении окрестностей $U(x_i)$, причём в силу выбора окрестностей $U(x_i)$ прообраз будет состоять из m кусков длины не более $\varepsilon/(2m)$ каждый. Тогда для меры получим

$$\mu\left(f^{-1}(y - \varepsilon, y + \varepsilon)\right) \le \varepsilon/2.$$

По доказанному, область значений f (компактное подмножество $[0, 1]$) можно покрыть такими выбранными интервалами $(y_j - \varepsilon_j, y_j + \varepsilon_j)$ в конечно числе, $j = 1, \dots, N$. Удалив случаи, когда один интервал содержится объединении нескольких других, можно утверждать, что $f([0, 1])$ покрыто интервалами с кратностью не более 2, а значит их суммарная длина не более 2, что влечёт $\sum_j \varepsilon_j \le 1$.

Но тогда отрезок $[0, 1]$ покрыт множествами $f^{-1}(y_j - \varepsilon_j, y_j + \varepsilon_j)$ суммарной меры не более $\sum_j \varepsilon_j/2 < 1/2$, противоречие с субаддитивностью меры.

Другое решение задачи.

Лемма. *Непрерывная на отрезке положительной длины функция либо монотонна на каком-то интервале, либо принимает какое-то значение бесконечно много раз.*

Набросок доказательства леммы. Из теоремы о промежуточном значении легко вывести, что если $f(a) \neq f(b)$, то на отрезке $[a, b]$ можно найти точки $c < d$ так что $f(c) = f(a)$, $f(d) = f(b)$ и $f([c, d]) \subseteq [f(c), f(d)]$ или $f([c, d]) \subseteq [f(d), f(c)]$. Предположив, что ни на каком интервале функция не монотонна, строится стягивающаяся последовательность вложенных отрезков $[c_n, d_n]$, для которых попеременно выполняется $f([c_n, d_n]) \subseteq [f(c_n), f(d_n)]$ или $f([c_n, d_n]) \subseteq [f(d_n), f(c_n)]$. Для их общей точки x из теоремы о промежуточном значении выводится, что значение $y = f(x)$ принимается бесконечно много раз хотя бы с одной стороны от точки x. $\square$

Решение задачи получается следующим образом. Аналогично первому решению замечаем, множество решений уравнения $f(x) = y$ дискретно и, следовательно, конечно. Тогда по лемме функция должна быть монотонна на каком-то интервале. Но на таком интервале обратная функция будет иметь нулевую производную, то есть будет константой — противоречие.

4. Эллипсоид E содержится в симплексе Δ, который находится в единичном шаре B пространства $\mathbb{R}^n$. Докажите, что сумма главных полуосей эллипсоида E не более единицы.

Решение. Параметризуем E шаром B, то есть найдём какое-либо аффинное отображение $A : B \to E$. В барицентрических координатах симплекса Δ его компонентами являются неоднородные линейные функции $f_i(x) = \lambda_i(x) + c_i$, $i = 0, \dots, n$. Они обладают свойством $\lambda_i(B) \geq 0$ в силу включения $E \subset \Delta$, следовательно $|\lambda_i| \leq c_i$. А в силу нормировки барицентрических координат $\sum_{i=0}^{1} f \equiv 1$ имеет место равенство $\sum_{i=0}^{n} c_i = 1$.

Если p_i — вершины симплекса Δ, то A выражается как

$$A(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i \lambda_i(x) + \sum_{i=0}^{n} c_i p_i = A'(x) + C.$$

Применив полярное разложение однородной части $A' = P'O$ на неотрицательный самосопряжённый и ортогональный оператор, напишем

$$P(x) := P'(x) + C = \sum_{i=0}^{n} p_i \lambda_i(O^{-1}x) + C.$$

В силу ортогональности O, $|\lambda_i \circ O^{-1}| \leq c_i$ и $O(B) = B$. То есть P тоже параметризует эллипсоид E шаром B. Вспомнив, что $|p_i| \leq 1$ в силу включения $\Delta \subset B$, и рассматривая p_i как отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, переводящее 1 в p_i, для следа получаем

$$\operatorname{tr} P' = \sum_{i=0}^{n} \operatorname{tr}\left(p_i \circ \lambda_i \circ O^{-1}\right) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \circ O^{-1} \circ p_i \leq \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i \circ O^{-1}| \cdot |p_i| \leq \sum_{i=0}^{n} c_i = 1.$$

Посмотрев на диагональный вид P', мы убеждаемся, что неравенство для следа означает, что сумма длин полуосей E не более 1.