

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
14 ДЕКАБРЯ 2014

1 КУРС

1. На плоскости нарисованы две гиперболы H_1 и H_2 с общими асимптотами. Аффинное преобразование плоскости переводит H_1 в себя. Верно ли, что оно переводит H_2 в себя?

2. Пусть дан набор последовательностей \mathcal{A} из нулей и единиц и функция $f : \{0, 1\}^k \rightarrow \{0, 1\}$. Известно, что всякая последовательность $(a_n) \in \mathcal{A}$ удовлетворяет соотношению

$$a_n = f(a_{n+1}, \dots, a_{n+k})$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Каково максимальное (в зависимости от k) количество элементов в \mathcal{A} ?

3. У матрицы $n \times n$ суммы чисел в любой строке и в любом столбце равны нулю. Докажите, что все её миноры $(n-1) \times (n-1)$ равны по абсолютной величине.

4. Предположим, что функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет производную $f^{(k)}(x)$ для любого k и любого $x \neq 0$. Также предположим, что при $x \rightarrow 0$ она представляется в виде

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k + o(x^k)$$

при любом натуральном k .

а) Обязана ли f иметь производную $f^{(k)}(0)$ для любого k ?

б) Тот же вопрос при условии, что все производные $f^{(k)}(x)$ ограничены в некоторой проколотой окрестности нуля.

5. Пусть кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ задана параметрически как $\bar{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, причём параметризация удовлетворяет условию Гёльдера

$$|\bar{r}(t) - \bar{r}(s)| \leq C|t - s|^\alpha$$

с $C > 0$ и показателем $\alpha > 1/2$. Докажите, что Γ не может замести единичный квадрат.

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
14 ДЕКАБРЯ 2014

2–6 КУРС

1. Пусть дан набор последовательностей \mathcal{A} из нулей и единиц и функция $f : \{0, 1\}^k \rightarrow \{0, 1\}$. Известно, что всякая последовательность $(a_n) \in \mathcal{A}$ удовлетворяет соотношению

$$a_n = f(a_{n+1}, \dots, a_{n+k})$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Каково максимальное (в зависимости от k) количество элементов в \mathcal{A} ?

2. Существует ли непрерывная на всей плоскости функция двух переменных, имеющая ровно два локальных экстремума, такая, что значение в точке локального минимума больше, чем в точке локального максимума?
3. Пусть E — конечномерное евклидово пространство, A и B — линейные операторы в нём. Оказалось, что для любого $x \in E$ получается $|Ax| \leq |Bx|$. Докажите, что $|\det A| \leq |\det B|$.
4. Пусть кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ задана параметрически как $\bar{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, причём параметризация удовлетворяет условию Гёльдера

$$|\bar{r}(t) - \bar{r}(s)| \leq C|t - s|^\alpha$$

с $C > 0$ и показателем $\alpha > 1/2$. Докажите, что Γ не может заместить единичный квадрат.

5. Многочлен $P(x, y)$ принимает значение ноль ровно в 5 точках вещественной плоскости. Какую наименьшую степень он может иметь?