УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
09 января 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Многомерный анализ, интегралы и ряды**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФФПФ**
факультет: **ФОПФ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
Базовая часть — 6 зач. ед.;
лекции — 60 часов
практические занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
120 часов

Составитель программы:
д. ф.-м. н., профессор Р. Н. Карасёв

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 15 ноября 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Дифференцирование функций нескольких переменных

1. Дифференцируемые отображения открытых множеств в евклидовом пространстве. Частные производные. Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных в точке.
2. Дифференцирование композиции отображений.
3. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных высших порядков. Теорема о независимости смешанной производной от порядка дифференцирования.
4. Формула Тейлора для функций нескольких переменных.

Абсолютно сходящиеся числовые ряды

5. Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства. Перестановка членов абсолютно сходящихся рядов.
6. Повторное суммирование и теорема о перемножении абсолютно сходящихся рядов.
7. Сравнение абсолютно сходящихся рядов. Сумма геометрической прогрессии.

Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

8. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности и ряды. Критерий Коши равномерной сходимости.
9. Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
10. Теорема о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.
11. Теорема о производной предела последовательности дифференцируемых функций. Почленное дифференцирование функциональных рядов.

Степенные ряды

12. Степенные ряды, их радиус сходимости. Равномерная сходимость степенных рядов в круге.
13. Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
14. Производные и первообразные степенных рядов в круге сходимости.
15. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Разложение функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ в степенные ряды.
16. Разложение функций $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ в степенные ряды.
17. Разложение функции $(1+x)^\alpha$ в степенной ряд.

Условная сходимость числовых и функциональных рядов

18. Преобразование Абеля. Сходимость степенного ряда на конце интервала сходимости.
19. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.
20. * Перестановка слагаемых в условно сходящемся числовом ряде.

Интеграл Римана на отрезке

21. Разбиения отрезка, суммы Дарбу и интеграл Римана. Ступенчатые функции на отрезке, линейность и монотонность интеграла от ступенчатой функции.
22. Свойства интеграла Римана на отрезке: линейность, аддитивность, монотонность.
23. Интегрируемость по Риману модуля, суммы, разности и произведения интегрируемых функций.
24. Интегралы с переменным верхним пределом. Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу и существование первообразной у непрерывной функции.
25. Интегрируемость по Риману монотонной функции.
26. Формула Ньютона–Лейбница для интеграла Римана на отрезке.
27. Интегрирование по частям и замена переменных в интеграле Римана. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
28. Иррациональность числа e. * Доказательство иррациональности числа π по Нивену–Бурбаки.

Мера Лебега и её свойства

29. Мера элементарных множеств в евклидовом пространстве, корректность её определения и аддитивность.
30. Внешняя мера Лебега для подмножеств $\mathbb{R}^n$. Счётная субаддитивность внешней меры Лебега и её значение для элементарных множеств.
31. Расстояние между множествами в смысле внешней меры Лебега. Множества конечной меры Лебега и теоретико-множественные операции с ними.
32. Счётная аддитивность меры Лебега для множеств конечной меры.
33. Множества с возможно бесконечной мерой Лебега, операции с ними и счётная аддитивность меры Лебега в общем случае.
34. Бесконечные объединения и пересечения измеримых по Лебегу множеств.
35. Свойства непрерывности и регулярности меры Лебега.
36. * Пример не измеримого по Лебегу множества.

37. Измеримые по Лебегу функции и их свойства. Измеримость поточечного предела измеримых функций.
38. Борелевские множества, борелевские функции и их свойства.

Интеграл Лебега и его свойства

39. Счётно-ступенчатые функции и интеграл Лебега для них.
40. Приближение измеримой функции ступенчатыми и интеграл Лебега для произвольной измеримой функции.
41. Существование возможно бесконечного интеграла Лебега для неотрицательной измеримой функции.
42. Абсолютная интегрируемость интегрируемой по Лебегу функции и её разложение на неотрицательную и неположительную часть.
43. Линейность и монотонность интеграла Лебега.
44. * Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

Предельный переход в интеграле Лебега

45. Понятие приближения функции в среднем. Приближение интегрируемой функции в среднем ограниченной функцией.
46. Приближение в среднем интегрируемой функции функцией с конечным числом элементарных ступенек.
47. Счётная аддитивность интеграла Лебега по множествам интегрирования.
48. Непрерывность интеграла Лебега по множествам интегрирования и непрерывность интеграла Лебега по отрезку с переменным верхним пределом.
49. Теорема о монотонной сходимости. Перестановка счётного суммирования и интегрирования.
50. Теорема об ограниченной сходимости.

Несобственные интегралы функции одной переменной

51. Вторая теорема о среднем для интеграла произведения функций по отрезку.
52. Несобственные интегралы. Критерий Коши их сходимости.
53. Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.
54. Интегральный признак сходимости ряда неотрицательных чисел.

Повторное интегрирование и линейная замена переменных в интеграле Лебега

55. * Теорема Фубини — сведение кратного интеграла к повторному.
56. Мера подграфика неотрицательной функции и представление интеграла неотрицательной функции через интегрирование по области значений.
57. Линейная замена переменных в интеграле Лебега.

Применения интеграла Лебега

58. Интегралы, зависящие от параметра. Достаточные условия возможности переставить интегрирование и дифференцирование по параметру.
59. Интегральная теорема о среднем для непрерывной на связном множестве функции.
60. Вычисление интеграла Пуассона и объёма единичного шара в $\mathbb{R}^n$.
61. Гамма-функция, формула понижения и её значения при целых и полуцелых значениях аргумента.
62. Бета-функция и её выражение через гамма-функцию.
63. Асимптотическая формула Стирлинга для гамма-функции.

*** Дифференцируемость почти всюду**

64. * Лемма Безиковича о покрытии отрезками на прямой.
65. * Теорема о плотности измеримого множества на прямой.
66. * Усреднение интегрируемой по Лебегу на прямой функции, дифференцируемость почти всюду интеграла с переменным верхним пределом.
67. * Существование производной почти всюду и формула Ньютона–Лейбница для липшицевой функции одной переменной.

Литература

Основная

1. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа. `http://rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf`

Дополнительная

2. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1, Т. 2. — М.: Наука, 2000.
3. *Tao T.* An Introduction to Measure Theory. — American Mathematical Society, 2011.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: Физматлит, 2003. (цитируется — С1)
2. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: Физматлит, 2003. (цитируется — С2)
3. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

Замечание. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендуется разобрать на семинарских занятиях. Если задача с подчёркнутым номером была разобрана, то студент не обязан записывать её решение в домашнее задание.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 2–6 марта)

I. Множества в конечномерных евклидовых пространствах

С3, §2: 9 (вопросы а, б, г) ($\underline{3}, 6$).

Т.1. Найдите для множества точек в квадрате $[0,1]\times[0,1]$ с рациональными координатами множества его

а) внутренних точек; б) внешних точек; в) граничных точек.

С3, §1: 15; 18; 39($\underline{6}$,7).

Т.2. Является ли множество

$$C = \{(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2\}$$

в пространстве $\mathbb{R}^4$:
а) открытым; б) замкнутым; в) областью?

II. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

С3, §2: 37(2, 8); 48(9).

Т.3. Для функции $f(x,\, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ исследуйте существование предела в точке $(0,\, 0)$. Посчитайте пределы по направлению для этой функции в точке $(0,\, 0)$.

III. Частные производные, дифференциал и формула Тейлора для функции нескольких переменных

С3, §3: <u>19(8)</u>; 20(3); 21(<u>2</u>, 11).

С3, §4: <u>4</u>; 19(2); 25(2); <u>42(1)</u>.

С3, §4: <u>70(2)</u>; 74(5).

IV. Числовые ряды

С2, §13: 2(1); 5(3); <u>10(1)</u>; <u>13(2)</u>; 14(4).

С2, §14: 2(7); <u>11(6)</u>; 19(8, <u>15</u>); 21(7, <u>14</u>); <u>25(9)</u>; 38^*.

С2, §15: 3(4); 4(4); 8(4); <u>9(2)</u>.

Во всех задачах §15 исследуйте также абсолютную сходимость рядов.

$\boxed{40 + 1^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 6–10 апреля)

I. Функциональные последовательности

С2, §17: 8(5); 9(11); 12(5); 17(10).

Т.1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на отрезке $E = [0,\,1]$ функциональные последовательности:
а) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

II. Функциональные ряды

С2, §18: <u>22(1)</u>; 32(5); 34(6); <u>36(2)</u>; 45; <u>46</u>.

Т.2. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,\,1)$ и $E_2 = (1,\,+\infty)$ ряды:
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x \sin \frac{1}{(xn)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x \ln nx}{n^2}$.

III. Свойства равномерной сходимости

С2, §19: 2; 5; <u>14</u>.

Т.3. Докажите, что если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и имеет компактный носитель (равна нулю за пределами некоторого отрезка), а $t_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность функций

$$f_n(x) = f(x - t_n)$$

равномерно стремится к f.

Т.4*. Докажите, что всякая непрерывная на отрезке функция является равномерным пределом последовательности кусочно-линейных непрерывных функций.

IV. Степенные ряды и ряд Тейлора

С2, §20: 2(3); 3(1); <u>5(2)</u>; 8(4).

С2, §21: 6(5); 9(3); 11(4); 19(4); <u>25(4)</u>; 56(1); <u>80</u>.

V. Свойства меры Лебега и меры Жордана

Т.5. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ и $T \subset \mathbb{R}^m$ — элементарные множества. Докажите, что для их декартова произведения $S \times T \subset \mathbb{R}^{n+m}$ выполняется $m\,(S \times T) = mS \cdot mT$.

Т.6. Может ли счётное множество $X \subseteq \mathbb{R}$ иметь нулевую меру Жордана?

Т.7. Может ли счётное множество $X \subseteq \mathbb{R}$ иметь положительную меру Жордана?

Т.8. Пусть X — это множество рациональных точек квадрата $[0,1]^2$. Измеримо ли оно по Жордану? Измеримо ли оно по Лебегу?

Т.9. Приведите пример замкнутого подмножества отрезка $[0,1]$, состоящего только из иррациональных чисел и имеющего меру Лебега не менее 0,999.

Т.10. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет Лебегову меру нуль, функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Докажите, что $f(A)$ тоже имеет Лебегову меру нуль.

Т.11*. Докажите, что утверждение предыдущей задачи будет неверно, если заменить непрерывную дифференцируемость f на непрерывность.

Т.12. Докажите, что если $X \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу с конечной мерой, то мера $\mu(X \setminus (X+t))$ стремится к нулю при $t \to 0$. Здесь $X+t$ — это сдвиг множества X на t.

Т.13. Докажите, что у произвольной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ множество точек разрыва измеримо по Лебегу.

Т.14. Докажите, что если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу, то её график имеет меру Лебега нуль на плоскости.

Т.15. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема везде. Докажите, что её производная измерима по Лебегу.

$\boxed{37 + 2^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 11–15 мая)

I. Интеграл функции одной переменной

С2, §6: 4(1); 112(1, 2); 117; 126; 197; 108(1).
С2, §10: 45*.

Т.1. Докажите, что $\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{2}{a}$, где $b > a > 0$.

II. Свойства интеграла Лебега

Т.2. Верно ли, что если f имеет первообразную на отрезке $[a,\,b]$, то f интегрируема по Лебегу на отрезке $[a,\,b]$?

Т.3. Пусть функция f интегрируема по Лебегу на множестве X положительной меры Лебега, и $f(x) > 0$ для любого $x \in X$. Докажите что

$$\int_X f(x)\,dx > 0.$$

Т.4. Докажите, что если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу, то

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|\,dx = 0.$$

Т.5. Докажите, что если $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, дифференцируема на (a,b), и её производная ограничена, то

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt.$$

Т.6. Докажите, что интегрируемая по Риману на отрезке функция интегрируема и по Лебегу с тем же интегралом.

Т.7*. Докажите, что $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена и множество её точек разрыва имеет меру Лебега нуль.

Т.8. Приведите пример непрерывной и непостоянной на отрезке функции, у которой производная почти всюду (по мере Лебега) существует и почти всюду равна нулю.

III. Несобственные и условно сходящиеся интегралы

C2, §11: 85; 88; 94; <u>98</u>.

C2, §12: <u>91</u>; 100; <u>104</u>; 121; <u>125</u>; 135; <u>139</u>; <u>140</u>; 183; 227^*.

IV. Вычисление и геометрические приложения интеграла Лебега

C2, §7: 4(3); 69(6); 72(3); 82(4).

<u>T.9</u>. Пусть $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — положительно определённая квадратичная форма. Докажите формулу

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)}\, dx_1 \dots dx_n = \pi^{n/2} \cdot (\det Q)^{-1/2}.$$

T.10. Посчитайте интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|}\, dx_1 \dots dx_n.$$

T.11. Напишите асимптотически эквивалентную формулу для двойного факториала

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

при $n \to \infty$ без факториалов.

$\boxed{34 + 3^*}$

Составитель задания: д. ф.-м. н., профессор Р. Н. Карасёв