Утверждено
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

Программа

по дисциплине: **Введение в математический анализ**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФФФП**
факультет: **ФОПФ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

Трудоёмкость:
Базовая часть — 6 зач. ед.;
лекции — 60 часов
практические занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

Всего аудиторных часов — 120

Самостоятельная работа:
120 часов

Составитель программы:
Р. Н. Карасёв, д. ф.-м. н., профессор

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 10 мая 2021 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Множества и действительные числа

1. Натуральные, целые, рациональные числа.
2. Основные понятия теории множеств. Объединение, пересечение и декартово произведение. Отображения и последовательности.
3. Пределы и фундаментальные последовательности рациональных чисел, определение действительных чисел.
4. Арифметические операции и сравнение действительных чисел.
5. Предел последовательности действительных чисел. Полнота множества действительных чисел (критерий Коши).

Свойства пределов последовательностей

6. Бесконечные пределы. Существование предела монотонной последовательности.
7. Переход к пределу в неравенствах, единственность предела последовательности.
8. Существование общей точки последовательности вложенных отрезков. Единственность общей точки для стягивающейся последовательности.
9. Точные грани числовых множеств: определение, существование и единственность. Другие определения действительных чисел.
10. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Предел суммы, разности, произведения и частного.

Определение элементарных функций

11. Неравенство Бернулли, экспонента и логарифм.
12. Тригонометрические функции, их определение и свойства. Неравенства $|\sin t| < |t| < |\operatorname{tg} t|$ при $0 < |t| < \frac{\pi}{2}$.

Частичные пределы, топология на прямой и мощности

13. Частичные пределы, верхний и нижний пределы. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Теорема о единственном частичном пределе.
14. Топология на множестве действительных чисел. Открытые, замкнутые и компактные множества. Критерий компактности.
15. Биекции и мощность множеств. Сравнение мощностей.
16. Теоремы о счётности множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и несчётности множества $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Непрерывные функции и их свойства

17. Непрерывность функции в точке. Определение по Коши и по Гейне.
18. Непрерывность суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций.
19. Теорема о непрерывности композиции функций.

20. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.
21. Непрерывность монотонного отображения промежутка на промежуток. Непрерывность обратной функции.
22. Топологическое определение непрерывности функции и его эквивалентность другим определениям.
23. Свойства функций, непрерывных на компактных множествах.

Пределы функций

24. Два определения предела функции (по Коши и по Гейне). Их эквивалентность.
25. Свойства пределов функций, связанные с неравенствами и арифметическими операциями.
26. Односторонние пределы. Теорема об односторонних пределах монотонных функций.
27. Критерий Коши существования предела функции.
28. Сравнение асимптотического поведения функций. Порядок функции, асимптотическая эквивалентность, символы o и O.

Производная и её свойства

29. Определение и геометрический смысл производной. Производные функций $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\log_a x$.
30. Линейное приближение и дифференциал функции. Непрерывность дифференцируемой функции.
31. Производная суммы, разности, произведения и частного.
32. Производная композиции функций. Производная функции x^α.
33. Производная обратимой функции. Производные обратных тригонометрических функций.

Исследование функций с помощью производной

34. Локальные экстремумы. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля.
35. Теоремы Лагранжа и Коши о среднем значении.
36. Условия постоянства, возрастания и убывания дифференцируемой функции.
37. Достаточные условия экстремума дифференцируемой функции.
38. Достаточное условие выпуклости дифференцируемой функции.
39. Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей вида $0/0$.
40. Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей вида ∞/∞.

Производные высших порядков

41. Формула Лейбница для n-й производной произведения двух функций.

42. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
43. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
44. Разложения по формуле Тейлора элементарных функций: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

Метрические пространства, их подмножества и топология

45. Метрические пространства, пределы последовательностей точек и полнота.
46. Евклидовы n-мерные пространства. Неравенства Коши–Буняковского–Шварца и треугольника, полнота евклидова пространства.
47. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах и их свойства.
48. Внутренность, замыкание и граница подмножества метрического пространства. Открытость внутренности, замкнутость замыкания и границы.
49. Индуцированная метрика и топология на подмножествах метрического пространства, относительно замкнутые и открытые множества.
50. Связные множества в метрических пространствах. Описание связных подмножеств числовой прямой.
51. Компактные множества в метрическом пространстве и критерий компактности в евклидовом пространстве.
52. Компактность и секвенциальная компактность в метрических пространствах.

Непрерывные отображения метрических пространств

53. Непрерывные отображения метрических пространств. Определение непрерывности в точке по Коши и по Гейне. Топологическое определение непрерывности на множестве.
54. Свойства непрерывных отображений, определённых на компакте и на связных множествах.
55. Расстояние между точкой и множеством и между двумя множествами в метрическом пространстве. Достаточное условие достижимости расстояния между множествами в евклидовом пространстве.
56. Кривые в метрическом пространстве и их конкатенация. Линейная связность метрического пространства, её сравнение со связностью и сохранение линейной связности при непрерывных отображениях.
57. Равномерно непрерывные отображения метрических пространств, модуль непрерывности. Теорема о равномерной непрерывности отображения на компакте.

58. Полунепрерывные функции, достаточные условия достижимости минимума на компакте. Колебание функции в точке и его полунепрерывность.

Длина кривой в метрическом пространстве

59. Определение и свойство аддитивности длины дуги кривой.
60. Спрямляемые кривые. Непрерывная зависимость длины дуги кривой от параметра, натуральная параметризация кривой.
61. Спрямляемость непрерывно дифференцируемой кривой в евклидовом пространстве. Производная длины дуги по параметру.
62. Кривизна и формулы Френе для кривой на евклидовой плоскости. Радиус кривизны, центр кривизны и эволюта.
63. Кривизна, главная нормаль и бинормаль кривой в $\mathbb{R}^3$. Кручение и формулы Френе для кривой ненулевой кривизны.

Многочлены с комплексными коэффициентами

64. Теорема о существовании комплексного корня многочлена с комплексными коэффициентами. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители.
65. Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя многочленов. Разложение рациональной функции на элементарные дроби.

Литература

Основная

1. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа. rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf

Дополнительная

2. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — М.: Физматлит, 2004.
   Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1. — М.: Наука, 2000.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: Физматлит, 2003. (цитируется — С1)
2. Сборник задач по математическому анализу. Т.2. Интегралы. Ряды: Учебное пособие / Под ред. Л.Д. Кудрявцева. — М.: Физматлит, 2003. (цитируется — С2)

Замечание. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендуется разобрать на семинарских занятиях. Если задача с подчёркнутым номером была разобрана, то студент не обязан записывать её решение в домашнее задание.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 25–29 сентября)

I. Натуральные, целые, рациональные и действительные числа

<u>Т.1</u>. Докажите, что всякое рациональное число однозначно представляется в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, а $q \in \mathbb{N}$.

Т.2. Докажите, что если для действительного x число $x + \frac{1}{x}$ оказалась целым, то при любом натуральном n число $x^n + \frac{1}{x^n}$ тоже будет целым.

Т.3. Найдите формулу без многоточий для суммы геометрической прогрессии для действительного числа $x \neq -1$

$$1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n.$$

<u>Т.4</u>. Найдите формулу без многоточий для суммы для действительного числа $x \neq 1$

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n.$$

Т.5. Докажите формулу для любого натурального числа n

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

<u>Т.6</u>. Докажите неравенство для любого натурального числа n

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Т.7. Докажите, что три положительных действительных числа a, b, c являются длинами сторон некоторого треугольника тогда и только тогда, когда

$$a^4 + b^4 + c^4 < 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2.$$

Т.8*. Докажите, что для всякого действительного x и натурального Q найдётся целое p и натуральное $q \le Q$, такие что

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{Qq}.$$

II. Отношения эквивалентности и порядка, отображения

<u>Т.9</u>. Пусть m — натуральное число. Проверьте, что на множестве целых чисел отношение

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \text{ делится на } m$$

является отношением эквивалентности. Докажите, что множество классов эквивалентности по этому отношению, $\mathbb{Z}/(m)$, корректно наследует от целых чисел операции сложения, вычитания и умножения.

Т.10. В условиях предыдущей задачи, при каких m и $r \in \mathbb{Z}/(m)$ можно корректно определить деление на r в $\mathbb{Z}/(m)$?

Т.11. Докажите, что в линейно упорядоченном множестве минимальный элемент единственный, если он существует.

Т.12. Приведите пример, когда в частично упорядоченном множестве минимальный элемент не единственный.

Т.13. Докажите, что в любом непустом множестве натуральных чисел существует минимальный элемент.

Т.14. Докажите, что для непустого X отображение $f : X \to Y$ имеет *левое обратное* $g : Y \to X$, для которого $g \circ f = \mathrm{id}_X$, тогда и только тогда, когда f инъективно.

Т.15*. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ имеет *правое обратное* $g : Y \to X$, для которого $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, тогда и только тогда, когда f сюръективно.

III. Комплексные числа (С1, §5)

Т.16. Определите, какое множество на комплексной плоскости задаёт уравнение

а) $|z|^2 = z + \bar{z}$; <u>б)</u> $|z-2|^2 + |z+2|^2 = 26$.

Т.17. Представьте в тригонометрическом виде комплексные числа

а) $\sqrt{3}+i$; б) $1+\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}$.

Т.18. Представьте в алгебраическом виде комплексные числа

а) $(1+i)^{11}$; б) $(\sqrt{3}+i)^{8}$.

Т.19. Найдите все корни уравнения $z^4+1=0$ и разложите многочлен $P(z)=z^4+1$ в произведение квадратных трёхчленов с действительными коэффициентами.

Т.20. Для данного натурального n найдите сумму всех биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k}$ с k, делящимися на три.

Т.21. Пусть правильный n-угольник $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ вписан в единичную окружность. Найдите произведение длин отрезков

$$|A_0A_1|\cdot|A_0A_2|\ldots|A_0A_{n-1}|.$$

Т.22. Докажите, что если натуральные числа a и b представляются в виде суммы двух квадратов различных натуральных чисел, то их произведение ab представляется в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

Т.23*. Рассмотрим кольцо чисел $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib\mid a,b\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{C}$. Определим среди них простые числа как бо́льшие единицы по модулю, которые не представляются в виде произведения двух бо́льших единицы по модулю чисел из кольца $\mathbb{Z}[i]$. Докажите, что тогда каждое число из кольца $\mathbb{Z}[i]$ раскладывается в произведение простых чисел этого кольца однозначно с точностью до перестановки простых и умножения простых на числа из кольца $\mathbb{Z}[i]$, равные по модулю единице.

Т.24. Покажите, что утверждение предыдущей задачи неверно, если кольцо $\mathbb{Z}[i]$ заменить на кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]=\{a+\sqrt{-3}b\mid a,b\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{C}$.

Т.25. На множестве четвёрок действительных чисел (a,b,c,d), записываемых в виде $a+ib+jc+kd$ (с формальными знаками i,j,k) введём умножение аналогично комплексным числам по более сложным правилам

$$i^2=j^2=k^2=-1,\ ij=k, jk=i, ki=j, ji=-k, kj=-i, ik=-j,$$

это называется *кватернионы*. Докажите, что у всякого ненулевого кватерниона есть обратный относительно умножения.

Т.26. Решите в кватернионах уравнение

а) $q^2-1=0$; б) $q^2+1=0$.

IV. Числовые последовательности (C1, §7)

T.27. Является ли ограниченной последовательность, заданная формулой

а) $\dfrac{n^4+n^2+1}{(n+1)^2}$; б) $2^{(10-n)(10n-1)}$; в) $n^{(-1)^n}$?

T.28. Докажите, что заданная формулой последовательность является монотонной, начиная с некоторого момента

а) $\sqrt{2n^2}-\sqrt{n^2+100}$; б) $\dfrac{n-2}{\sqrt{n^2+2}}$; в) $\sin\frac{100}{n}$.

V. Пределы последовательностей и их вычисление (C1, §8)

T.29. Докажите по определению предела последовательности

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-n}{2+n}=-1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{(n+1)^2}=1$.

T.30. Является ли обязательно число a пределом последовательности, если

а) $\exists N\in\mathbb{N}\ \forall\varepsilon>0\ \forall n\geq N\ |x_n-a|<\varepsilon$;

б) $\forall\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n\geq N\ |x_n-a|<\varepsilon$?

T.31. Приведите примеры последовательностей (x_n) и (y_n), стремящихся к нулю и таких, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$

а) равен 0; б) равен 1; в) равен $+\infty$; г) не существует.

T.32. Запишите с помощью кванторов утверждения и их отрицания

а) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

T.33. Найдите предел последовательности, заданной как отношение многочленов

$$x_n=\frac{a_pn^p+a_{p-1}n^{p-1}+\cdots+a_0}{b_qn^q+b_{q-1}n^{q-1}+\cdots+b_0}$$

в зависимости от их степеней p и q и их коэффициентов.

T.34. Найдите предел последовательности, заданной формулой с действительным $a>0$

а) $\sqrt[n]{a}$; б) $\dfrac{a^n}{n!}$; в) $\dfrac{n^k}{a^n}$, где k целое.

T.35. Пусть k — натуральное число, а последовательность неотрицательных чисел (x_n) стремится к $a\in[0,+\infty)$. Найдите предел последовательности, заданной формулой $y_n=\sqrt[k]{x_n}$.

Т.36. Найдите предел последовательности, заданной формулой

а) $\sqrt[n]{n}$; б) $\sqrt[n]{3^n + n^2 2^n}$.

Т.37. Найдите предел последовательности, заданной рекуррентно как

а) $x_1 = 13$, $x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}$; <u>б)</u> $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$.

Т.38. Приведите пример последовательностей (x_n) и (y_n), для которых $x_n < y_n$ при любом n, но они сходятся к одному и тому же числу.

<u>Т.39</u>. Докажите, что сходящаяся последовательность содержит своё минимальное или максимальное значение.

Т.40. Докажите, что последовательность, заданная формулой $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin k}{k^2}$, фундаментальна.

Т.41. Верно ли, что последовательность (x_n) сходится, если для любого $p \in \mathbb{N}$ оказывается $\lim\limits_{n\to\infty} |x_{n+p} - x_n| = 0$?

VI. Частичные пределы (С1, §8)

<u>Т.42</u>. Докажите, что если подпоследовательности (x_{2k}) и (x_{2k-1}) последовательности (x_n) имеют один и тот же предел, то и она сама имеет тот же предел.

Т.43. Имеет ли предел последовательность $n^{(-1)^n}$?

<u>Т.44</u>. Докажите, что последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена и имеет только один частичный предел.

Т.45. Может ли множество частичных пределов последовательности (x_n) быть равно $\left\{\pm\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$?

Т.46*. Пусть α — иррациональное число. Докажите, что последовательности $(\cos \pi\alpha n)_n$ и $(\sin \pi\alpha n)_n$ имеют множеством частичных пределов весь отрезок $[-1, 1]$.

$\boxed{42 + 4^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 30 октября – 3 ноября)

I. Топология на действительной прямой и мощность множества

Т.1. Докажите, если множество X действительных чисел состоит только из изолированных точек, то оно не более чем счётно.

Т.2. Докажите, что из всякого покрытия отрезка $[0,1]$ интервалами можно выбрать подпокрытие, которое накрывает каждую точку отрезка не более чем два раза.

Т.3. Докажите, что из всякого покрытия интервала $(0,1)$ интервалами можно выбрать не более чем счётное подпокрытие.

Т.4*. Докажите, что из всякого покрытия интервала $(0,1)$ отрезками положительной длины можно выбрать не более чем счётное подпокрытие.

Т.5*. Докажите, что если множества $Z, Y \subseteq X$ открыты относительно множества $X \subseteq \mathbb{R}$ и не пересекаются, то найдутся непересекающиеся открытые $U, V \subseteq \mathbb{R}$, такие что $Z = X \cap U$ и $Y = X \cap V$.

Т.6. Докажите, что отрезок $[0,1]$ равномощен интервалу $(0,1)$.

Т.7. Докажите, что для любого множества X множество всех подмножеств X, 2^X, не равномощно X.

Т.8*. Докажите, что отрезок действительных чисел $[0,1]$ равен по мощности $2^{\mathbb{N}}$.

II. Непрерывность функций (С1, §10)

Т.9. Докажите по определению (по Коши) непрерывность функции

а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$; в) $f(x) = \ln x$.

Т.10. В каких точках непрерывны функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

а) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$ в) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}? \end{cases}$

Здесь p/q — несократимая дробь с положительным знаменателем, представляющая данное рациональное число.

Т.11. Приведите пример непрерывной на интервале функции, которая

а) не является ограниченной;

б) ограничена, но не достигает точной верхней и нижней грани своих значений.

Т.12. Докажите, что $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ ограничена, если она непрерывна и имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Т.13. Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обладает свойством $f(x) > x$ для любого x. Докажите, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ последовательность, определённая рекуррентно как $x_n = f(x_{n-1})$, стремится к $+\infty$.

<u>Т.14</u>. Докажите, что многочлен нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень.

Т.15. Пусть функция $f : [a, b] \to [a, b]$ непрерывна. Докажите, что найдется такая точка $x \in [a, b]$, для которой верно $x = f(x)$.

<u>Т.16</u>. Пусть непрерывная функция $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ имеет равные значения на концах отрезка $f(0) = f(1)$. Докажите, что для всякого α вида $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, уравнение $f(x + \alpha) = f(x)$ имеет решение.

Т.17*. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ не равно никакому $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Приведите пример непрерывной функции $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, которая имеет равные значения на концах отрезка $f(0) = f(1)$ и такой, что уравнение $f(x + \alpha) = f(x)$ не имеет решений.

III. Пределы функций и разрывы (С1, §9)

Т.18. Запишите с помощью кванторов утверждения и их отрицания

а) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Т.19. Найдите пределы функций

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$; <u>б)</u> $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{\pi^2 - x^2}$.

<u>Т.20</u>. Следует ли из равенств $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ равенство $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = y_0$?

Т.21. Придумайте разрывную $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая отображает любой отрезок в отрезок.

Т.22. Пусть функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ возрастают и оказалось, что их сумма $f + g$ непрерывна. Докажите, что обе функции f и g тоже непрерывны.

IV. Приёмы нахождения производных (С1, §13)

Т.23. Найдите производные функций а) $\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$; б) $\cos(3\arccos x)$; <u>в)</u> x^{x^x}.

<u>Т.24</u>. Найдите производные гиперболических функций $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и их обратных функций.

V. Приёмы нахождения первообразных (С2, §§1–5)

Т.25. Найдите первообразные функций

а) $\sin^2 \frac{x}{2}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$; в) $\dfrac{1}{\cos x}$; г) $x \ln x$;

д) $e^{ax} \cos bx$ при $a, b \neq 0$; е) $e^{ax} \sin bx$ при $a, b \neq 0$;

ё) $\dfrac{x^2}{x^2 - 6x + 10}$; ж) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; з) $\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2}$; и) $\dfrac{1}{x^3+1}$;

й)* $\dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{(x^2+1)^2}$; к) $\dfrac{1}{x(x^2-1)(x^2-4)}$; л) $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$;

м) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}$; н) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; о) $x^3\sqrt{x^2-1}$;

п) $\sin^3 x \cos^4 x$; р) $\dfrac{1}{\sin x + \cos x}$; с) $\dfrac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$.

$\boxed{21 + 4^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 4–8 декабря)

I. Свойства производной и производные высших порядков (С1, §§13,15)

Т.1. Исследуйте на дифференцируемость функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданные формулами

а) $|x|$; б) $x|x|$; в) $|\sin x|$; г) $|1 + \cos x|$.

Т.2. При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ функция

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

в точке $x = 0$: а) непрерывна; б) имеет производную; в) имеет непрерывную производную?

Т.3. Найдите производную обратной к функции $f(x) = x + \sin x$ в точках

а) $y = 0$; б) $y = 1 + \pi/2$; в) $y = \pi$.

Т.4. Найдите y'_x для функции, заданной параметрически

а) $y = a \operatorname{ch} t$, $x = b \operatorname{sh} t$, $a, b \neq 0$; б) $y = \cos t$, $x = \operatorname{ch} t$ (для всех $t \in \mathbb{R}$).

T.5. Найдите y''_{xx} для функции, заданной параметрически

<u>а)</u> $y = \dfrac{t^2}{1+t^3}$, $x = \dfrac{t^3}{1+t^3}$; б) $y = a\cos t$, $x = b\sin t$, $a, b > 0$.

T.6. Найдите $y^{(n)}$ в зависимости от n для функции, заданной формулой

а) $\sin^4 x + \cos^4 x$; <u>б)</u> $\dfrac{x}{x^2-4x-12}$; в) $(x-1)2^{x-1}$;

г) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$; д) $\ln(1+x)^{x^2}$; <u>е)</u> $(x^2+x)\cos^2 x$.

II. Теоремы о среднем и исследование функций на экстремум (С1, §16)

<u>T.7</u>. Докажите, что если n раз дифференцируемая на интервале функция $n+1$ раз обращается в нуль на этом интервале, то в некоторой точке этого интервала $f^{(n)}$ обращается в нуль.

T.8. Докажите неравенство $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ для $x > 0$.

T.9. Докажите, что если функция дифференцируема и неограниченна на конечном интервале, то её производная тоже неограниченна.

<u>T.10</u>. Докажите, что если функция f непрерывна на $[1,2]$ и дифференцируема на $(1,2)$, то найдётся $\xi \in (1,2)$, такая что $f(2) - f(1) = \frac{\xi^2}{2} f'(\xi)$.

T.11. Предположим, что функция f дифференцируема n раз, $f^{(n)}(x) \geq 0$ на всей прямой, а многочлен P степени n таков, что уравнение $f(x) = P(x)$ имеет $n+1$ решение. Докажите, что старший коэффициент P неотрицателен.

T.12. Докажите, что если квазимногочлен $P(x)e^{ax}$ (где P — обычный многочлен и $a \neq 0$) имеет n различных корней, то его производная имеет не менее n различных корней.

T.13*. Докажите, что если функция имеет первообразную на интервале, то она переводит промежутки в промежутки.

<u>T.14</u>. Докажите неравенство $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ для положительных a, b, p, q, таких что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

T.15. Исследуйте, что больше при натуральном n: e^x или $1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n!}$? Рассмотрите случаи положительных и отрицательных x отдельно.

III. Вычисление пределов по правилу Лопиталя (С1, §17)

Т.16. Найдите с помощью правила Лопиталя значения пределов в зависимости от параметров a и b:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a e^{bx}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a \ln^b x$.

Т.17. Найдите пределы

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\ln x}{\sqrt{\ln x}}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2\operatorname{arctg} x}{\pi}\right)^x$;

Т.18. Найдите предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$ и объясните, почему его не удаётся найти с помощью правила Лопиталя.

Т.19. Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема на всей числовой прямой.

IV. Формула Тейлора (С1, §18)

Т.20. Представьте функцию формулой Тейлора с произвольной точностью в данной точке x_0

а) $\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$, $x_0 = 0$; б) $(1-x)\ln(1+5x+6x^2)$, $x_0 = 0$; в) $\dfrac{3x-1}{x^2+x-6}$, $x_0 = 0$;

г) $x\cos^2 x$, $x_0 = 0$; д) $(x^2-1)e^{2x}$, $x_0 = -1$; е) $x(x-2)2^{x^2-2x-1}$, $x_0 = 1$.

Т.21. Представьте функцию $x^3|x| + \cos x$ формулой Маклорена с остаточным членом $o(x^n)$ при максимально возможном n.

Т.22. Представьте функцию $(1+x)^{\sin x}$ формулой Маклорена с остаточным членом $o(x^5)$.

Т.23. Представьте функцию $\operatorname{tg} x$ формулой Маклорена с остаточным членом $o(x^6)$.

V. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора (С1, §19)

Т.24. Найдите пределы с помощью формулы Тейлора

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{tg}(x/2)} - \sqrt{1+\sin x} - x^2/4}{\arccos x - \operatorname{arcctg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sh} 2x} - \cos x - x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg}\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{\arcsin x}\right)^{1/x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2} - x}{x\sin\frac{x^2}{6}}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x - x}{\sqrt{1+x^2} - \ln(1+x^3)}\right)^{1/x^3}$.

VI. Равномерная непрерывность и полунепрерывность

T.25. Докажите, что если функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, равномерно непрерывна, то она продолжается до равномерно непрерывной функции на замыкании множества X.

T.26. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, равномерно непрерывна, то найдутся такие $L, C > 0$, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| + C.$$

T.27. Докажите, что если $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна и имеет конечный предел при $x \to +\infty$, то f равномерно непрерывна.

T.28. Является ли равномерно непрерывной на своей области определения функция
а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $f(x) = x \sin x$; в) $f(x) = x \sin \ln x$?

T.29. Приведите пример полунепрерывной снизу функции на отрезке, не имеющей максимального значения.

T.30. Докажите, что сумма полунепрерывных снизу функций полунепрерывна снизу.

VII. Расстояние и метрические пространства

T.31. Будет ли прямая $\mathbb{R}$ метрическим пространством, если расстояние определить как
а) $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$; б) $\rho(x, y) = (x - y)^2$?

T.32. Пусть на множестве M есть расстояние $\sigma : M \times M \to \mathbb{R}^+$, превращающее его в метрическое пространство. Верно ли, что отображение $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$, заданное формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sigma(x, y)},$$

тоже превращает M в метрическое пространство?

T.33. Пусть на множестве M есть два расстояния $\sigma, \tau : M \times M \to \mathbb{R}^+$, превращающие его в метрическое пространство. Верно ли, что отображение $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$, заданное формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sigma(x, y)^2 + \tau(x, y)^2},$$

тоже превращает M в метрическое пространство?

T.34*. Докажите, что расстояния $\rho_1((x, y), (z, t)) = \sqrt{(x - z)^2 + (y - t)^2}$ и $\rho_2((x, y), (z, t)) = |x - z| + |y - t|$ на плоскости задают одну и ту же топологию.

VIII. Касательная, нормаль и кривизна кривой в евклидовом пространстве (С1, §24)

<u>**Т.35**</u>**.** Найдите касательный вектор, главную нормаль и бинормаль в произвольной точке кривой $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t \in \mathbb{R}$. Выпишите уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямляющей плоскостей в произвольной точке этой кривой.

Т.36. Найдите кривизну кривой при произвольном значении её параметра $t \in \mathbb{R}$

<u>а)</u> $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, с постоянными $a, b > 0$;

б) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, с постоянной $a > 0$.

Т.37. Найдите наибольшую кривизну кривой, являющейся графиком функции $y = \ln(1 + \operatorname{ch} x)$.

<u>**Т.38**</u>**.** Найдите кривизну и кручение кривой при произвольном значении параметра t и постоянными $a, b \neq 0$

<u>а)</u> $x(t) = a\cos t$, $y(t) = a\sin t$, $z(t) = bt$;

б) $x(t) = a\operatorname{ch} t$, $y(t) = a\operatorname{sh} t$, $z(t) = bt$.

$\boxed{36 + 2^*}$

Задания составили: О. А. Загрядский, к. ф.-м. н., ассистент,
Р. Н. Карасёв, д. ф.-м. н., профессор