1. Анализ

1.1. **Последовательности.**

1.1. Докажите, что у всякой последовательности действительных чисел есть монотонная подпоследовательность.

1.2. Пусть A — несчётное множество действительных чисел. Докажите, что существует строго возрастающая последовательность (a_n), все члены которой принадлежат A.

1.3. Пусть дана последовательность действительных чисел (x_n) и оказалось, что последовательность $(3x_{n+1} - 2x_n)$ сходится. Докажите, что (x_n) тоже сходится.

1.4. Докажите, что последовательность $a_n = \{\alpha n\}$ (фигурные скобки обозначают дробную часть) при иррациональном α имеет множеством частичных пределов отрезок $[0, 1]$.

1.5. * Докажите, что последовательность $a_n = \{\alpha n^2\}$ при иррациональном α имеет множеством частичных пределов отрезок $[0, 1]$.

1.2. **Непрерывность.**

1.6. Существует ли непрерывная на отрезке функция такая, что её значения в рациональных точках иррациональны, а в иррациональных точках рациональны?

1.7. Пусть $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Докажите, что найдётся подмножество $X \subseteq [0, 1]$ мощности континуум, на котором функция f монотонна.

1.8. Пусть $f : [0, 1] \to [0, 1]$ — непрерывная функция. Докажите, что последовательность (x_n), заданная соотношениями

$$x_1 \in [0, 1],\ x_{n+1} = f(x_n)$$

сходится тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$.

1.9. Для каких $\alpha \in (0, 1)$ можно утверждать следующее: если функция $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ непрерывна и $f(0) = f(1)$, то найдётся $x \in [0, 1 - \alpha]$ такой, что $f(x + \alpha) = f(x)$?

1.10. Дана ограниченная и непрерывная функция $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Докажите, что для любого $T > 0$ найдётся последовательность (x_n), такая что $x_n \to +\infty$ и $f(x_n+T)-f(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

1.11. Пусть у функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в каждой точке x_0 существует конечный предел

$$g(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Докажите, что функция $g(x)$ непрерывна.

1.12. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

Докажите, что существует $x_0 \in \mathbb{R}$, такое что $f(x_0) = 0$.

1.13. Существует ли непрерывная функция $y = f(x)$, принимающая каждое значение $y \in \mathbb{R}$ ровно три раза?

1.14. Существует ли непрерывная функция, принимающая каждое действительное значение чётное положительное число раз?

1.15. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ отображает всякий интервал на интервал. Верно ли, что она непрерывна?

1.16. Пусть $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Верно ли что

а) $\dfrac{f(x)}{x}$ ограничена;

б) существует $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

1.17. Пусть последовательность непрерывных функций $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ поточечно сходится к $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причём последовательность $(f_n(x))$ убывает по n при любом x. Докажите, что f полунепрерывна сверху, то есть для любого x_0

$$f(x_0) \geq \overline{\lim_{x\to x_0}} f(x).$$

1.18. Функция $f(x, y)$, непрерывная на $[0, 1] \times [0, 1]$, обладает таким свойством: при всяком фиксированном x минимум $f(x, y)$ достигается ровно в одной точке $y = g(x)$. Докажите, что полученная так функция $g(x)$ непрерывна.

1.19. Пусть $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ — непрерывная функция, причём последовательность её итераций $f_1(x) = f(x)$, $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$ сходится поточечно к непрерывной функции g. Докажите, что $f_n(x)$ сходится к $g(x)$ равномерно на $[0, 1]$.

1.3. **Производные.**

1.20. Пусть для дважды дифференцируемой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ при любом $x \in \mathbb{R}$ выполняется $|f(x)| \leq A$, $|f''(x)| \leq B$. Докажите, что также выполняется $|f'(x)| \leq \sqrt{2AB}$.

1.21. Докажите, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ трижды непрерывно дифференцируема и её третья производная ограничена по модулю числом $12C$, то выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^3$$

при условии $f'(x) = f'(y) = 0$.

1.22. Найдите производную для натурального k:

$$\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}(1 + x^2)^{k-1/2}.$$

1.23. Пусть для дифференцируемой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ оказалось, что $f(x)f'(x) = 0$ в любой точке $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что это постоянная функция.

1.24. Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ не обязательно непрерывна, но имеет первообразную. Докажите, что если f принимает два значения $A < B$, то она обязательно принимает и любое значение $C \in (A, B)$.

1.25. Докажите, что непрерывная на интервале функция f выпукла тогда и только тогда, когда в каждой точке x интервала

$$\overline{\lim_{h\to+0}} \frac{f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)}{h^2} \geq 0.$$

1.26. Предположим, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет производную $f^{(k)}(x)$ для любого k и любого $x \neq 0$. Также предположим, что при $x \to 0$ (и $x = 0$) она представляется в виде

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k + o(x^k)$$

при любом натуральном k.

а) Обязана ли f иметь производную $f^{(k)}(0)$ для любого k?

б) Тот же вопрос при условии, что все производные $f^{(k)}(x)$ ограничены в некоторой проколотой окрестности нуля.

1.27. Докажите, что функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, продолженная в нуле как $f(0) = 0$, имеет первообразную.

1.28. Пусть $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ — последовательность действительных чисел. Докажите, что существует бесконечно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, у которой $f^{(n)}(0) = a_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}^+$.

1.29. Докажите, что если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), то она удовлетворяет условию Липшица $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$ с некоторой константой L на некотором интервале $(c, d) \subseteq (a, b)$.

1.30. Существует ли непрерывная на всей плоскости функция двух переменных, имеющая ровно два локальных экстремума, такая, что значение в точке локального минимума больше, чем в точке локального максимума?

1.31. Существует ли непрерывно дифференцируемая функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, переводящая рациональные числа в рациональные, а иррациональные — в иррациональные и строго выпуклая.

1.4. **Топология на прямой и в $\mathbb{R}^n$.**

1.32. Существует ли замкнутое несчётное подмножество $\mathbb{R}$, состоящее только из иррациональных чисел?

1.33. Докажите, что у счётного числа открытых множеств, плотных в $\mathbb{R}^n$ (то есть таких, замыкание которых совпадает с $\mathbb{R}^n$), пересечение всегда непусто и плотно в $\mathbb{R}^n$.

1.34. Докажите, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не может быть непрерывной во всех рациональных точках и разрывной во всех иррациональных точках.

1.35. Пусть A, B — два непустых подмножества $\mathbb{R}$, причём $A \cap \overline{B} = \emptyset$ и $B \cap \overline{A} = \emptyset$ (черта означает замыкание). Докажите, что найдутся два непересекающихся открытых множества $U, V \subset \mathbb{R}$, такие что $U \supseteq A$, $V \supseteq B$.

1.36. Пусть ∂ означает взятие границы множества в $\mathbb{R}^n$. Верно ли, что для любого $X \subseteq \mathbb{R}^n$ выполняется

$$\partial(\partial(\partial X)) = \partial(\partial X)?$$

1.37. Постройте кривую $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, которая дважды непрерывно дифференцируема, имеет единичную скорость и ограниченную кривизну, не имеет самопересечений, и ещё так, чтобы дополнение к её замыканию было связно.

1.38. Можно ли интервал (a, b) представить в виде объединения счётного числа попарно непересекающихся отрезков? Одна точка тоже считается отрезком.

1.39. Можно ли интервал (a, b) представить в виде объединения какого-либо числа попарно непересекающихся отрезков? Одна точка не считается отрезком.

1.40. Докажите, что замкнутое множество $X \subseteq \mathbb{R}$, у которого каждая точка $x \in X$ лежит в замыкании $X \setminus \{x\}$, имеет мощность континуума.

1.5. **Интегралы и ряды.**

1.41. Пусть функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и $f(x) > 0$ для любого $x \in [a, b]$. Докажите, что

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0.$$

1.42. Пусть в условно сходящемся ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

переставили слагаемые и получили

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}.$$

Докажите, что сумма ряда не поменяется, если найдётся M такое, что для любого n

$$|\sigma(n) - n| \leq M.$$

1.43. Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируется в среднем (по Чезаро), то последовательность (a_n) стремится в среднем к нулю.

1.44. Обозначим $\sigma_2(n)$ число единиц в двоичном представлении натурального числа n. найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_2(n)}{n(n+1)}.$$

1.45. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Докажите, что для любого положительного x и натурального n выполняется

$$|f^{(n)}(x)| < \frac{1}{n+1}.$$

1.46. Существует ли бесконечно дифференцируемая функция на отрезке $[0,1]$, у которой все производные на отрезке $[0,1]$ неотрицательные, любая производная в нуле и значение функции в нуле равны нулю, и $f(1) = 1$?

1.47. Докажите, что если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируется в среднем (по Чезаро), то функцию

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

можно непрерывно продолжить с полуинтервала $[0,1)$ в точку 1.

1.48. Найдите значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}\, dx.$$

1.6. **Ряды Фурье.**

1.49. Пусть непрерывная функция представлена сходящимся рядом Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

где $N \geq 1$. Докажите, что она имеет не менее $2N$ нулей на периоде $[0, 2\pi)$.

1.50. Пусть $x_1, \dots, x_N$ — различные числа на полуинтервале $(-\pi, \pi]$, а $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ не все равны нулю. Докажите, что последовательность

$$c_n = a_1 e^{inx_1} + a_2 e^{inx_2} + \dots + a_N e^{inx_N}$$

не может стремиться к нулю при $n \to \infty$.

1.51. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая бесконечно дифференцируемая функция. Положим

$$m_n = \left(\int_0^{2\pi} |f^{(n)}(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Докажите, что последовательность $\left(m_n^{1/n} \right)$ имеет конечный или бесконечный предел.

1.52. Докажите, что если функция удовлетворяет условию Гёльдера

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

на $[-\pi, \pi]$, то её коэффициенты Фурье можно оценить как

$$|c_n(f)| \leq C \left(\frac{\pi}{n} \right)^{-\alpha}.$$

1.53. Найти порядок убывания коэффициентов Фурье функции $f(x) = \sqrt{|x|}$ на $[-\pi, \pi]$, разложенной по тригонометрической системе.

1.54. Предположим, что непрерывная 2π-периодичная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обладает таким свойством: множество её сдвигов $\{f(x+t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ порождает конечномерное подпространство в пространстве непрерывных функций $C(\mathbb{R})$. Докажите, что f — тригонометрический многочлен.

1.55. Рассмотрим функцию $f \in L_1[-\pi, \pi]$ и её частичные суммы ряда Фурье $T_n(f, x)$. Докажите, что для любых $a, b \in [-\pi, \pi]$

$$\int_a^b T_n(f, x) \, dx \to \int_a^b f(x) \, dx$$

при $n \to \infty$. Более простой вариант — докажите это для $f \in L_2[-\pi, \pi]$.

1.56. Существует ли ненулевая бесконечно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что для всякого многочлена p интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x) \, dx$$

сходится и равен нулю?

1.57. Пусть последовательность $(a_n)_{n=0}^\infty$ положительных чисел убывает, стремится к нулю и выпукла (в смысле $a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1} \geq 0$ при $n \geq 1$). Докажите, что сумма

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx$$

неотрицательна в тех точках, в которых она сходится.

1.58. Докажите, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \cos 2^n x$ не дифференцируема ни в одной точке.

1.59. Пусть X — конечное подмножество решётки $\mathbb{Z}^2$, состоящее из более чем одной точки. Предположим, что сдвигами X на целочисленные векторы можно без пересечений (в один слой) покрыть $\mathbb{Z}^2$. Докажите, что функция $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$

$$P(x, y) = \sum_{(n,m) \in X} e^{inx + imy}$$

обращается в нуль в некоторой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1.60. Пусть f непрерывна и 2π-периодична, а α/π иррационально. Докажите, что выражение

$$\frac{f(x) + f(x+\alpha) + \cdots + f(x+(n-1)\alpha)}{n}$$

при $n \to \infty$ стремится к среднему по периоду значению f.

1.61. Пусть α/π иррационально и на окружности $|z| = 1$ дан отрезок I длины $\ell(I)$. Посчитаем среди точек $1, e^{i\alpha}, \ldots, e^{i(n-1)\alpha}$ количество таких, которые попали в I, обозначим это количество a_n. Докажите, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\ell(I)}{2\pi}.$$

1.62. * Пусть α/π иррационально и на окружности $|z| = 1$ дан отрезок I длины $\ell(I)$. Посчитаем среди точек $1, e^{i\alpha}, e^{i4\alpha}, \ldots, e^{i(n-1)^2\alpha}$ количество таких, которые попали в I, обозначим это количество b_n. Докажите, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{\ell(I)}{2\pi}.$$

1.7. **Функциональные пространства.**

1.63. Предположим, линейное отображение $T : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ коммутирует с дифференцированием и умножением функции на x. Докажите, что T — это умножение на константу, то есть $T(f) = cf$ для некоторой константы c и любой $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

1.64. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ограничена и непрерывна, а также оказалось, что в каждой точке x её значение равно её среднему значению на единичной сфере с центром в x. Докажите, что f равна константе.

1.65. Пусть $U : H \to H$ — унитарный оператор в гильбертовом пространстве. Докажите, что для любого $x \in H$ последовательность

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^i x$$

сходится к Px, где P — ортогональный проектор на пространство инвариантных относительно U векторов.

1.66. Предположим, что $(f_n)_{n=1}^\infty$ — равномерно ограниченная последовательность функций на отрезке $[0,1]$, являющаяся ортонормированной в смысле

$$\int_0^1 f_n(x) f_m(x)\, dx = \delta_{nm}.$$

Может ли последовательность $f_n(x)$ иметь поточечный предел?

1.67. Рассмотрим возрастающую последовательность целых чисел $(n_k)_{k=0}^\infty$ с $n_0 = 0$. Докажите, что система функций $(x^{n_k})_{k=0}^\infty$ полна в $C[0,1]$ тогда и только тогда, когда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$$

расходится.

Указание. Рассмотрите сначала полноту в норме L_2.

1.68. Придумайте какой-нибудь базис в пространстве $C[0,1]$, то есть систему функций $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$, такую что любая другая непрерывная функция $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ раскладывается в равномерно сходящийся ряд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x).$$

Указание. Сначала заметьте, что любую непрерывную функцию легко равномерно приблизить кусочно-линейными.

1.69. Докажите, что всякая обобщённая функция $\lambda\in D'(\mathbb{R})$ имеет первообразную, то есть такую $\mu\in D'(\mathbb{R})$, что

$$\mu'=\lambda$$

в смысле дифференцирования обобщённых функций. Докажите, что любые две первообразные одной и той же обобщённой функции отличаются на константу.

1.70. Обобщённая функция $\lambda\in D'(\mathbb{R})$ называется *неотрицательной*, если

$$\lambda(\varphi)\ge 0 \quad \text{для всякой всюду неотрицательной} \quad \varphi\in D(\mathbb{R}).$$

Докажите, что у неотрицательной обобщённой функции есть регулярная первообразная.

1.71. Пусть $f\in L^2[0,1]$ — вещественнозначная функция, и $a_n=\int\limits_0^1 x^n f(x)\,dx$ — её моменты. Доказать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2<\pi\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx.$$

1.8. **Комплексный анализ.**

1.72. Пусть непрерывная функция $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ такова, что её квадрат $f(z)^2$ оказался многочленом от z. Верно ли, что сама f — многочлен?

1.73. Пусть функция $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ взаимно однозначно отображает единичный диск $D\subset\mathbb{C}$ на открытую область $U\subseteq\mathbb{C}$. Докажите, что площадь U равна

$$\sum_{n=1}^{\infty}\pi n|a_n|^2.$$

1.74. Пусть функция $f(z)$ аналитическая при $0<|z|<2$ и интеграл

$$\int_{0<|z|\le 1}|f(z)|^2\,dxdy$$

сходится (здесь $x=\operatorname{Re}z,\ y=\operatorname{Im}z$). Докажите, что особенность $f(z)$ в нуле устранима.

1.75. Докажите, что (суммирование в смысле главного значения)

$$\operatorname{ctg}z=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-\pi n}.$$

1.76. Докажите, что

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2n^2}\right).$$

1.77. Пусть функции f и g аналитические в области U. Оказалось, что

$$|f(z)|+|g(z)|=1$$

во всей области. Докажите, что обе функции — константы.

1.78. Пусть конформное отображение переводит кольцо $r < |z| < R$ в другое кольцо на комплексной плоскости и продолжается до непрерывного отображения границы кольца в границу нового кольца. Докажите, что отношение R/r при таком отображении сохраняется.

1.79. Пусть при конформном отображении $f : Q \to \mathbb{C}$ образ единичного квадрата Q имеет площадь S, и пусть I и J — две его противоположные стороны. Докажите, что $\operatorname{dist}(f(I), f(J)) \leq \sqrt{S}$

1.80. Пусть f — аналитическая функция на единичном круге. Докажите, что длина кривой $\Gamma_r = \{f(re^{i\varphi})\}_{\varphi=0}^{2\pi}$ монотонно возрастает с ростом $r \in [0, 1)$.

1.81. Пусть $f(z)$ аналитична в области $r < |z| < R$. Докажите, что функция действительного аргумента

$$g(x) = \ln \sup_{|z|=e^x} |f(z)|$$

выпукла вниз на $(\ln r, \ln R)$.

1.82. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в полосе $a < \operatorname{Re} z < b$, непрерывна вплоть до границы этой полосы и ограничена на бесконечности как $O(e^{|\operatorname{Im} z|^m})$ при некотором натуральном m. Докажите, что из ограниченности $f(z)$ при $\operatorname{Re} z = a$ и $\operatorname{Re} z = b$ следует ограниченность $f(z)$ (той же константой) во всей полосе.

1.83. Докажите, что в условиях предыдущей задачи функция

$$M(x) = \sup_{\operatorname{Re} z=x} |f(z)|$$

логарифмически выпукла на отрезке $[a, b]$.

1.84. Назовём перестановку $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$ *пилообразной*, если

$$(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) > 0 \quad \text{при всех} \quad i = 2, \ldots, n-1.$$

Обозначим через A_n количество таких пилообразных перестановок длины n. Пусть ε — число между 0 и $\pi/2$. Докажите, что при всех достаточно больших n верно неравенство

$$A_n \leq \frac{n!}{(\pi/2 - \varepsilon)^n}.$$

1.85. Докажите, что дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

продолжается до мероморфной функции при $\operatorname{Re} s > 0$ с простым полюсом только при $s = 1$.

1.86. Докажите, что сумма по простым числам

$$f(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s}$$

имеет порядок $\ln(s-1)$ при $s \to 1 + 0$.

1.87. Пусть a и m — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что сумма

$$f(s) = \sum_{p \in \mathbb{P} \ p \equiv a \pmod m} \frac{1}{p^s}$$

тоже имеет порядок $\ln(s-1)$ при $s \to 1 + 0$.

2. Вероятности

2.1. Найдите объём множества тех точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-мерного куба $[0,1]^n$, для которых любые две из координат отличаются более чем на d, где $d > 0$.

2.2. Пусть на окружности равномерно и независимо в совокупности выбираются n точек. Найдите вероятность того, что их выпуклая оболочка покроет центр окружности.

2.3. В некоторых целых точках неотрицательной четверти $(\mathbb{Z}_+)^2$ в начальный момент времени живёт инфекция (обозначим это множество M). На каждом такте времени происходит следующее: если точки $(x+1, y)$ и $(x, y+1)$ заражены, то в следующий момент времени будет заражена и точка (x, y) (и старые клетки останутся заражёнными). Известно, что ноль оказался заражён по истечении некоторого времени. Докажите, что

$$\sum_{(x,y)\in M} \frac{1}{1+x+y} \geq 1.$$

2.4. Докажите, что при $n \to \infty$

$$1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \ldots + \frac{n^n}{n!} \sim \frac{e^n}{2}.$$

3. Линейная алгебра

3.1. **Матрицы, детерминанты и линейные пространства.**

3.1. У матрицы $n \times n$ суммы чисел в любой строке и в любом столбце равны нулю. Докажите, что все её миноры $(n-1) \times (n-1)$ равны по абсолютной величине.

3.2. Докажите что для блочной матрицы, у которой диагональные блоки квадратные и A невырождена, верна формула

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B).$$

3.3. Пусть в линейном пространстве V размерности n дано семейство линейных подпространств $\mathcal{F}$. Докажите, что найдётся подсемейство $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ из не более n подпространств, пересечение которого совпадает с пересечением $\mathcal{F}$.

3.4. Пусть в векторном пространстве V даны конечные множества $S_1, \dots, S_n$ со следующим свойством: для любого набора индексов $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ (включая наборы из одного индекса) линейная оболочка

$$\langle S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \dots \cup S_{i_k} \rangle$$

имеет размерность не менее k. Докажите, что найдётся система представителей $s_i \in S_i$, которая является линейно независимой.

3.5. В $\mathbb{R}^n$ дано k-мерное аффинное многообразие A. Докажите, что в A есть вектор, у которого не менее k координат нулевые.

3.6. Какой может быть минимальный ранг матрицы A размера $n \times n$ с нулями на диагонали и положительными числами за пределами диагонали?

3.7. Комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать также как вещественное векторное пространство размерности $2n$. Докажите, что любое вещественное подпространство $L \subset \mathbb{C}^n$ вещественной размерности $2n-1$ содержит ровно одно комплексное подпространство $L' \subset \mathbb{C}^n$ комплексной размерности $n-1$.

3.8. Пусть A — матрица $n \times n$ из действительных чисел. Найдите максимальное значение $\det A$ при условии, что сумма квадратов элементов матрицы A равна 1.

3.9. Докажите, что всякую, не обязательно квадратную, матрицу A можно представить в виде

$$A = UPV,$$

где матрицы U и V квадратные невырожденные верхнетреугольные, а матрица P состоит из нулей и единиц, причём в каждой её строке и в каждом столбце стоит не более одной единицы. Докажите, что матрица P в этом разложении определена однозначно.

3.10. Пусть в векторном пространстве даны два базиса $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$. Докажите, что векторы y_i можно перенумеровать так, что для любого $k = 1, \dots, n-1$ последовательность $x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_n$ тоже будет базисом.

3.11. В $\mathbb{R}^n$ даны два базиса $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, причём первый из них разбит на непустые поднаборы $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_k$. Докажите, что Y тоже можно разбить на поднаборы соответствующего размера $Y = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_k$ так, что каждый набор $(X \setminus X_i) \cup Y_i$ $(i = 1, \dots, k)$ будет базисом.

3.2. **Линейные операторы.**

3.12. Докажите, что если A и B — линейные операторы в одном и том же пространстве, то характеристические многочлены произведений AB и BA одинаковые.

3.13. Пусть L — счётномерное линейное пространство, а $f\colon L \to L$ — линейное отображение. Обозначим $M = \cap_{n=1}^{\infty} f^n(L)$. Обязательно ли выполняется равенство $f(M) = M$?

3.14. Докажите, что ненулевая комплексная матрица A размера 2×2 является квадратом ($A = B^2$) тогда и только тогда, когда $A^2 \neq 0$.

3.15. Пусть квадратная матрица $A = (a_{ij})$ имеет собственное значение $\lambda \in \mathbb{C}$. Докажите, что для некоторого i

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

3.16. Пусть n — нечётное число, а $A = (a_{ij})$ — матрица $n \times n$, у которой a_{ij} зависит только от разности $i - j$ по модулю n и сумма в первой строке неотрицательна. Докажите, что $\det A \geq 0$.

3.17. Определим последовательность $(t_n(q))$ следующим образом

$$t_0(q) = 0, \quad t_{n+1}(q) = \frac{q}{1 - t_n(q)}, \text{ для } n \geq 0.$$

Найти для каждого $n \geq 1$ минимальное действительное положительное q, для которого $t_n(q)$ определено и равно 1.

3.18. Пусть для матрицы $n \times n$ оказалось, что $\operatorname{tr} A^k = 0$ при $k = 1, \ldots, n$. Докажите, что $A^n = 0$.

3.19. Докажите, что если для комплексной матрицы $n \times n$ и некоторого натурального числа m выполняется $A^m = E$, то матрица A диагонализуема.

3.20. Докажите, что любую матрицу с действительными коэффициентами можно представить в виде суммы двух коммутирующих между собой действительных матриц, одна из которых диагонализуема над комплексными числами, а другая нильпотентна.

3.21. Пусть $A_0, \ldots, A_k, B$ — квадратные матрицы одного размера, причём

$$A_0 + A_1 B + A_2 B^2 + \cdots + A_k B^k = 0.$$

Рассмотрим многочлен с действительными коэффициентами, заданный формулой

$$g(\lambda) = \det\left(A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + \cdots + A_k\lambda^k\right).$$

Докажите, что $g(B) = 0$, то есть при подстановке матрицы B в этот многочлен получается нулевая матрица.

3.22. Докажите, что для всякого обратимого линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ найдётся ортогональный базис $e_1, \ldots, e_n$ такой, что вектора $Ae_1, \ldots, Ae_n$ тоже образуют ортогональный базис.

3.3. **Квадратичные формы и самосопряжённые операторы.**

3.23. Докажите, что если матрица A кососимметричная, а B — симметричная положительно определённая, то AB может оказаться симметричной только если $A = 0$.

3.24. Докажите, что положительные числа a, b, c являются сторонами некоторого треугольника тогда и только тогда, когда

$$1 + 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c > \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{ch}^2 b + \operatorname{ch}^2 c.$$

3.25. Обозначим
$$E(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n-1}^2$$
стандартную квадратичную форму на $\mathbb{R}^{2n-1}$. Пусть $Q(\bar{x})$ — другая квадратичная форма на $\mathbb{R}^{2n-1}$. Докажите, что найдётся n-мерное линейное подпространство $L \subseteq \mathbb{R}^{2n-1}$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$, такие что для любого $\bar{x} \in L$
$$Q(\bar{x}) = \alpha E(\bar{x}).$$

3.26. В евклидовом пространстве E даны два подпространства U и V. Оператор $A : U \to U$ действует так: всякий вектор $x \in U$ сначала ортогонально проецируется на V, а потом полученный вектор ортогонально проецируется на U. Докажите, что A самосопряжён.

3.27. В ортогональной матрице A выбрали две взаимно дополнительных квадратных подматрицы B и C (т.е. сумма размеров матриц B и C равна размеру матрицы A, и каждая строка и каждый столбец A содержит либо элементы B, либо элементы C). Докажите, что $\det B = 0$ тогда и только тогда, когда $\det C = 0$.

3.28. В ортогональной матрице A выбрали две взаимно дополнительных квадратных подматрицы B и C. Докажите, что $|\det B| = |\det C|$.

3.29. Докажите, что действительная симметричная матрица A неотрицательно определена тогда и только тогда, когда для любой симметричной неотрицательно определённой матрицы B выполнено неравенство $\operatorname{tr} AB \geq 0$.

3.30. Пусть A и B — действительные симметричные матрицы одного и того же размера, все собственные значения которых строго больше 1. Докажите, что все действительные собственные значения матрицы AB по модулю строго больше 1.

3.31. Пусть A и B — положительно определённые симметричные матрицы одного и того же размера. Докажите, что все собственные значения матрицы AB действительные.

3.32. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — конечные множества. Обозначим через a_{ij} количество элементов в множестве $A_i \cap A_j$. Докажите, что матрица $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ положительно полуопределена.

3.33. Пусть на $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$ заданы две квадратичные формы Q_1 и Q_2, составляющие отображение
$$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2.$$
Докажите, что образ единичной сферы при этом отображении является выпуклой фигурой.

3.34. Пусть симметричные матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ положительно определены. Докажите, что матрица $C = A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$ (поэлементное произведение матриц A и B) тоже положительно определена.

3.35. Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ — некоторые действительные числа. Докажите, что числа $a_{11} \geq a_{22} \geq \cdots \geq a_{nn}$ могут встретиться на диагонали симметричной действительной матрицы с собственными значениями λ_i тогда и только тогда, когда выполняются условия ($n-1$ неравенство и одно равенство)
$$a_{11} \leq \lambda_1, \ldots a_{11} + \cdots + a_{kk} \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_k, \ldots, a_{11} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

4. Дифференциальные уравнения

4.1. Предположим, дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y)$$

имеет единственное решение $y(x)$ для любых начальных условий $y(x_0) = y_0$, определённое на всей числовой прямой. Верно ли, что $f(x, y)$ обязана быть непрерывной?

4.2. Докажите, что уравнение

$$x^3 y'' + y = 0 \quad (x > 0)$$

имеет решение, стремящееся к $+\infty$ при $x \to +\infty$.

4.3. Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая на (a, b) функция, причём

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to b-0} f(x) = -\infty,$$

и для всех $x \in (a, b)$

$$f'(x) + f^2(x) \geq -1.$$

Докажите, что $b - a \geq \pi$.

4.4. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая функция, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ и

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0$$

для всех $x \geq 0$. Докажите, что

$$f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x}$$

для всех $x \geq 0$.

4.5. Найдите все дифференцируемые функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые удовлетворяют уравнению

$$f(a) - f(b) = (a - b) f' \left(\frac{a + b}{2} \right)$$

для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

4.6. Найдите все дифференцируемые функции $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, которые удовлетворяют уравнению

$$f(a) - f(b) = (a - b) f' \left(\sqrt{ab} \right)$$

для любых положительных a и b.

4.7. Докажите, что для любой квадратной комплексной матрицы A

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}.$$

4.8. Докажите, что решение однородной системы линейных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t) x(t)$$

с непрерывной матрицей $A(t)$ и начальным условием $x(0) = x_0$ можно найти по формуле

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n \leq t} A(s_n) A(s_{n-1}) \ldots A(s_1) x_0 \, ds_1 ds_2 \ldots ds_n.$$

4.9. Пусть линейная однородная система уравнений

$$\ddot{x}(t) = A(t)x(t)$$

с симметричной матрицей $A(t)$ не имеет решений, два раза обращающихся в нуль на отрезке $[0, \tau]$. Докажите, что выражение

$$F(x, x) = \int_0^\tau ((\dot{x}, \dot{x}) - (x, Ax))\ dt$$

положительно для ненулевых дифференцируемых вектор-функций $x : [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$, обращающихся в нуль на концах отрезка $[0, \tau]$.

4.10. Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый шар радиуса 1 с центром в нуле, а B' — шар большего радиуса с тем же центром. Функция $f : B' \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, и для любого $x \in B$ выполняется неравенство $|\nabla f(x)| \geq 1$. Докажите, что

$$\max_{x \in B} f(x) - \min_{x \in B} f(x) \geq 2.$$

4.11. Пусть у автономной системы дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = f(x)$$

правая часть является непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет условию Липшица $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$. Докажите, что если траектория $x(t)$ непостоянная и периодическая с периодом T, то $T \geq 2\pi/L$.

4.12. Пусть функция $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема и строго выпукла, то есть $u((1-t)x + ty) < (1-t)u(x) + tu(y)$ для любых $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ и $0 < t < 1$. Докажите, что краевая задача для $x : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$

$$\ddot{x} = \nabla u(x),\ x(0) = a,\ x(1) = b$$

имеет не более одного решения при любых $a, b \in \mathbb{R}^n$.

5. Основы алгебры

5.1. **Линейная алгебра II.**

5.1. Пусть у квадратной матрицы A элементы являются целыми числами и в каждой её строке сумма элементов делится на натуральное число k. Докажите, что $\det A$ тоже делится на k.

5.2. Пусть A — квадратная матрица из целых чисел с детерминантом, равным 1, размера не менее 2×2. Докажите, что её можно представить в виде произведения элементарных матриц с целыми коэффициентами (у которых на диагонали единицы и за пределами диагонали только один ненулевой элемент).

5.3. Пусть целочисленная матрица A размера $n \times n$ такова, что все её миноры размера $(k+1) \times (k+1)$ делятся на простое p. Докажите, что $\det A$ делится на p^{n-k}.

5.4. Пусть квадратная матрица A кососимметрична, то есть $A^t = -A$. Докажите, что все её собственные значения — мнимые числа.

5.5. Пусть квадратная кососимметричная матрица A состоит из целых чисел. Докажите, что $\det A$ является квадратом целого числа.

5.6. Докажите, что всякую положительно определённую квадратичную форму $f(x) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ с целыми a, b, c можно представить в виде суммы квадратов линейных форм вида $ex + dy$ с целыми e, d.

5.7. Пусть $A_1, \dots, A_N$ — набор эндоморфизмов конечномерного векторного пространства V, причём этот набор неприводим, то есть не существует ненулевого собственного подпространства $W \subset V$, инвариантного относительно всех A_i. Докажите, что всякий ненулевой эндоморфизм V, коммутирующий с каждым A_i, обратим. Докажите, что если основное поле алгебраически замкнуто, то каждый такой эндоморфизм скалярный (равен $\lambda\, \mathrm{id}_V$).

5.8. Пусть решётка $\mathbb{Z}^2$ разбита на подмножества $E_1, \dots, E_m$. При этом для каждого $i = 1, 2, \dots, m$ существует вектор v_i такой, что $E_i + v_i = E_i$, и векторы v_i попарно неколлинеарны. Докажите, что найдётся вектор u, не коллинеарный v_1 и такой, что $E_1 + u = E_1$.

5.2. **Числа и многочлены.**

5.9. Для чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ и отличного от них числа x докажите тождество
$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-x_i} \prod_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j}.$$

5.10. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ и $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ — два набора рациональных чисел. Докажите, что уравнение
$$e^{a_1 x} + e^{a_2 x} + \dots + e^{a_n x} = e^{b_1 x} + e^{b_2 x} + \dots + e^{b_n x}$$
имеет не более n действительных корней.

5.11. Пусть попарно различные целые числа $x_1, \dots, x_k$ сравнимы с единицей по модулю простого p, а неотрицательные целые числа $n_1, \dots, n_k$ дают попарно различные остатки по модулю p. Докажите, что детерминант матрицы $(x_i^{n_j})_{i,j=1}^k$ не равен нулю.

5.12. Пусть $w = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ для некоторого простого p. Докажите, что все миноры матрицы $(w^{(i-1)(j-1)})_{i,j=1}^p$ ненулевые.

5.13. Докажите, что для конечного набора точек на плоскости $\{(x_i, y_i)\}$, в котором координаты каждой точки целые и взаимно простые, найдётся однородный многочлен $P \in \mathbb{Z}[x, y]$, такой что для всех этих точек $P(x_i, y_i) = 1$.

5.14. Можно ли представить $\operatorname{arctg} 16$ в виде линейной комбинации

$$\operatorname{arctg} 16 = \sum_{k=1}^{15} m_k \operatorname{arctg} k$$

с целыми коэффициентами m_k?

5.15. Докажите, что любой многочлен с целыми коэффициентами принимает в некоторой целой точке ненулевое значение, делящееся на простое число вида $4k + 1$.

5.16. Пусть все (комплексные) корни многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1 имеют единичный модуль. Докажите, что все они являются корнями из единицы.

5.17. Пусть для некоторого действительного числа x оказалось, что $x^m + x^{-m}$ и $x^n + x^{-n}$ рациональны для некоторых взаимно простых натуральных m и n. Докажите, что $x + x^{-1}$ тоже рационально.

5.18. Пусть многочлен $P(x)$ степени n имеет целые коэффициенты. Докажите, что для некоторого $x \in [0, 1]$ будет

$$|P(x)| \geq \frac{1}{e^n}.$$

5.19. Докажите, что для любого рационального a и натурального n многочлен

$$P(x) = x^{2^n}(x + a)^{2^n} + 1$$

неприводим над рациональными числами.

5.20. Пусть $p < q$ — простые числа. Рассмотрим выпуклый pq-угольник с равными углами и сторонами попарно различных целых длин $a_1, \ldots, a_{pq}$, занумерованных по кругу. Докажите, что для всех натуральных $k \leq p$ выполняется

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq \frac{k^3 + k}{2}.$$

5.21. Докажите, что если у многочлена $P(x)$ все корни $x_1, \ldots, x_n$ действительны и имеют кратность 1, то при $0 \leq k \leq n - 2$ получается

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{{x_i}^k}{P'(x_i)} = 0.$$

5.22. Дана дробь $\frac{p}{q} = \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n}$, где $n \geqslant 1000$, $p, q \in \mathbb{N}$. Докажите, что p делится на $2^{\lfloor n+1-\log_2(n+1) \rfloor}$.

5.23. Найдите хотя бы три различных решения уравнения

$$s^3 + t^3 = 9$$

в рациональных числах.

5.24. Найдите решение уравнения в натуральных числах:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = \frac{1}{4}.$$

Подсказка: подберите для начала целое решение с отрицательными числами.

5.25. Придумайте многочлен $P(x, y)$ с действительными коэффициентами, область значений которого равна $(0, +\infty)$.

5.26. Многочлен $P(x, y)$ принимает значение ноль ровно в 5 точках вещественной плоскости. Какую наименьшую степень он может иметь?

5.27. Докажите, что у поля $\mathbb{R}$ нет нетривиальных автоморфизмов, то есть преобразований, сохраняющих сложение и умножение.

5.3. **Группы.**

5.28. Пусть у группы G есть подгруппа H индекса n. Докажите, что у G есть нормальная подгруппа $N \subseteq H$ индекса, делящего $n!$. В частности, если $n = 2$, то $N = H$.

5.29. Докажите, что у всякой группы порядка $4k + 2$ есть подгруппа порядка $2k + 1$.

5.30. Докажите, что если p, q, r — три различных простых числа, то всякая группа порядка pqr разрешима.

5.31. Верно ли следующее утверждение: если группа G изоморфна подгруппе группы H и группа H изоморфна подгруппе группы G, то H изоморфна G?

5.32. Рассмотрим группу перестановок Σ_n множества $[n] = \{1, \dots, n\}$. При каких n некоторая 2-силовская подгруппа $S \subset \Sigma_n$ переставляет элементы $[n]$ транзитивно?

5.33. Докажите, что группу собственных ортогональных преобразований $\mathrm{SO}(4)$ можно представить как факторгруппу $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ по подгруппе из двух элементов (E, E) и $(-E, -E)$. Здесь $\mathrm{SU}(2)$ удобно считать группой единичный кватернионов.

5.34. Докажите, что связную часть группы Лоренца $\mathrm{SO}^+(1, 3)$ можно представить как факторгруппу $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ по подгруппе из двух элементов E и $-E$.

5.35. Предположим, что непрерывная функция на единичной сфере $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ обладает таким свойством: множество функций $\{f_\sigma(x) = f(\sigma x)\}_{\sigma \in \mathrm{SO}(n)}$ порождает конечномерное подпространство в пространстве непрерывных функций $C(S^n)$. Докажите, что f — ограничение некоторого многочлена от n переменных на единичную сферу.

5.36. Пусть группа G является подгруппой свободной группы F на n образующих индекса $(F : G) = m$. Докажите, что G свободна и найдите количество образующий в ней как в свободной группе.

5.37. Докажите, что группа дробно-линейных функций $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/(\pm E)$ содержит свободную подгруппу, порождённую двумя элементами.

5.38. Докажите, что группа собственных вращений трёхмерного пространства $\mathrm{SO}(3)$ содержит свободную подгруппу, порождённую двумя элементами.

6. Неравенства

6.1. **Классические неравенства.**

6.1. Что больше, e^π или π^e?

6.2. Пусть a, b, c, d — векторы в $\mathbb{R}^n$, $(\cdot,\cdot)$ — стандартное скалярное произведение. Докажите, что

$$((a,c)+(b,d))^2 + ((a,d)-(b,c))^2 \le (a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2).$$

6.3. Докажите, что всякий многочлен степени $n \in \mathbb{N}$ со старшим коэффициентом 1 принимает на отрезке $[-1,1]$ значение, по модулю не меньшее 2^{-n+1}.

6.4. Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ имеет только действительные отрицательные корни. Докажите, что последовательность $b_k = \frac{a_k}{\binom{n}{k}}$ логарифмически вогнута, то есть

$$b_k^2 \ge b_{k-1}b_{k+1}$$

при $k = 1, \dots, n-1$.

6.5. Обозначим элементарную симметрическую функцию

$$\sigma_k(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n} x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}.$$

Докажите, что для любых $1 \le k < l \le n$ и неотрицательных действительных $x_1,\dots,x_n$ имеет место неравенство

$$\left(\frac{\sigma_k(x_1,\dots,x_n)}{\binom{n}{k}}\right)^{1/k} \ge \left(\frac{\sigma_l(x_1,\dots,x_n)}{\binom{n}{l}}\right)^{1/l}.$$

6.6. Пусть P — однородный многочлен степени m на $\mathbb{R}^n$, обладающий следующим свойством: для некоторого v, $P(v) > 0$, и для любого $x \in \mathbb{R}^n$ многочлен от одной переменной $Q(t) = P(x+vt)$ имеет только вещественные корни. Докажите, что компонента связности множества $\{x : P(x) > 0\}$, содержащая v, выпукла и на ней выполняется неравенство

$$P(x+y)^{1/m} \ge P(x)^{1/m} + P(y)^{1/m}.$$

6.7. Дана последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$ и натуральное число $d \ge 2$. Известно, что

$$a_0 = a_1 = \dots = a_d = 1,$$

и при $k \ge d$

$$a_{k+1} \ge a_k - \frac{a_{k-d}}{4d}.$$

Докажите, что все числа a_k положительные.

6.2. **Симметричные матрицы.**

6.8. Предположим, для трёх чисел a, b, c из отрезка $[-1,1]$ оказалось

$$1 + 2abc \ge a^2 + b^2 + c^2.$$

Докажите, что для любого натурального числа n будет выполняться неравенство

$$1 + 2a^n b^n c^n \ge a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}.$$

6.9. Пусть A — симметричная матрица, P — матрица ортогональной проекции, а f — выпуклая функция. Докажите, что

$$\operatorname{tr} Pf(PAP)P \le \operatorname{tr} Pf(A)P,$$

где функцию от симметричной матрицы можно определить как оператор с теми же собственными векторами и собственными значениями $f(\lambda)$ вместо λ.

6.10. Пусть собственные значения симметричной матрицы A упорядочены по убыванию $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Докажите, что (внешний максимум по линейным подпространствам)

$$\lambda_k = \max_{\dim L = k} \min_{\substack{x \in L \\ |x|=1}} (x, Ax).$$

6.11. Для двух n-элементных мультимножеств действительных чисел X и Y напишем $X \preccurlyeq Y$, если после сортировки по убыванию $X = (x_1, \dots, x_n)$ и $Y = (y_1, \dots, y_n)$ для всякого $k = 1, \dots, n$ выполняется

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i$$

и ещё $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$.

a) Докажите, что для всякой эрмитовой матрицы A её мультимножество диагональных элементов D и мультимножество собственных значений Λ связаны соотношением $D \preccurlyeq \Lambda$.

b) Докажите, что для всяких двух n-элементных мультимножеств $D \preccurlyeq \Lambda$ можно найти эрмитову матрицу A с мультимножеством диагональных элементов D и мультимножеством собственных значений Λ.

6.12. Докажите, что если симметрическая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяет условию

$$(x_i - x_j)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \geq 0, \quad \forall i, j,$$

то

$$X \preccurlyeq Y \Rightarrow f(X) \leq f(Y).$$

6.13. Определим *смешанный дискриминант* для n матриц $A_k = (a_{ij}^{[k]})$ размера $n \times n$ как

$$\mathrm{md}(A_1, \dots, A_n) = \sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n} (-1)^\sigma (-1)^\tau a_{\sigma(1)\tau(1)}^{[1]} a_{\sigma(2)\tau(2)}^{[2]} \dots a_{\sigma(n)\tau(n)}^{[n]},$$

при этом $\mathrm{md}(A, \dots, A) = n! \det A$.

Докажите, что для положительно определённых симметричных матриц $A_1, \dots, A_n$ имеет место неравенство:

$$\mathrm{md}(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)^2 \geq \mathrm{md}(A_1, A_1, A_3, \dots, A_n) \cdot \mathrm{md}(A_2, A_2, A_3, \dots, A_n).$$

6.3. **Объёмы и изопериметрические неравенства.**

6.14. Докажите, что площадь фигуры диаметра 2 на плоскости не более π.

6.15. Докажите, что из всех плоских многоугольников с заданным набором длин сторон максимальную площадь имеет тот, который вписан в окружность.

6.16. Пусть тетраэдр T' содержится в тетраэдре T. Доказать, что периметр (сумма длин рёбер) T' не превосходит $4/3$ от суммы длин рёбер T.

6.17. Докажите, что если (не обязательно прямоугольный) параллелепипед $P_1 \subset \mathbb{R}^3$ содержит другой не обязательно прямоугольный параллелепипед P_2, то периметр (сумма длин рёбер) P_1 не менее периметра P_2.

6.18. Докажите, что всякое полупространство H, содержащее центр масс выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$, содержит не менее $1/e$ от объёма K.

6.19. Пусть для непрерывных функций $f, g, h : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ с компактными носителями и некоторого $t \in (0, 1)$ выполняется

$$h((1-t)x + ty) \geq f(x)^t g(y)^{1-t}$$

при любых $x, y \in \mathbb{R}$. Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\, dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx\right)^t \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx\right)^{1-t}.$$

6.20. Докажите то же утверждение для функций $f, g, h : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ индукцией по n.

6.21. Докажите, что для двух компактных подмножеств $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ выполняется

$$\operatorname{vol}(X+Y)^{1/n} \geq \operatorname{vol} X^{1/n} + \operatorname{vol} Y^{1/n},$$

где $X + Y = \{x + y : x \in X,\ y \in Y\}$, а $\operatorname{vol} X$ обозначает меру Лебега X. Или меру Жордана, если мера Лебега вас смущает, тогда множества надо тоже считать измеримыми по Жордану.

6.22. Определим площадь поверхности (по Минковскому) как

$$\sigma X = \lim_{t\to+0} \frac{\operatorname{vol}(X + B(t)) - \operatorname{vol} X}{t},$$

когда предел существует, где $B(t)$ – евклидов шар радиуса t. Докажите, что для множеств $X \subset \mathbb{R}^n$, имеющих площадь поверхности, выполняется

$$\sigma X \geq n \frac{\sqrt{\pi}}{((n/2)!)^{1/n}} \operatorname{vol} X^{\frac{n-1}{n}}.$$

Проверьте, что для шаров в этом неравенстве выполняется равенство.

6.23. Докажите, что объём множества диаметра 2 в $\mathbb{R}^n$ не более объёма единичного шара.

6.24. Докажите, что для центрально симметричных выпуклых тел $K, L \subset \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{vol} K \cap L \geq \operatorname{vol} K \cap (L + t)$$

при любом $t \in \mathbb{R}^n$.

6.25. Докажите для любого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ неравенство

$$\operatorname{vol}(K - K) \leq \binom{2n}{n} \operatorname{vol} K.$$

Для каких тел достигается равенство?

6.26. Рассмотрим для любого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ тело $\mathrm{C}K \subset \mathbb{R}^{n+1}$, являющееся выпуклой оболочкой $K \times \{0\}$ и $-K \times \{1\}$. Докажите, что

$$\operatorname{vol} \mathrm{C}K \leq \frac{2^n}{n+1} \operatorname{vol} K.$$

6.27. Пусть E — конечномерное нормированное пространство, A и B — линейные операторы в нём. Оказалось, что для любого $x \in E$ получается $\|Ax\| \leq \|Bx\|$. Докажите, что $|\det A| \leq |\det B|$.

7. Комбинаторика

7.1. **Множества и отображения.**

7.1. Докажите, в последовательности из n^2+1 различных чисел найдётся монотонная подпоследовательность из $n+1$-го элемента.

7.2. Докажите, что не существует биекции между множеством X и множеством его подмножеств 2^X.

7.3. Докажите, что если существуют инъекции $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ (между некоторыми двумя множествами), то существует и биекция $h : X \to Y$.

7.4. Предположим, семейство подмножеств $\mathcal{C}$ натуральных чисел, $\mathcal{C} \subset 2^{\mathbb{N}}$, оказалось таким, что для любых $X, Y \in \mathcal{C}$ выполняется либо $X \subseteq Y$, либо $Y \subseteq X$. Верно ли, что $\mathcal{C}$ не более чем счётно?

7.5. Докажите, что существует семейство подмножеств $\mathcal{F}$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ со следующими свойствами:
i) $\mathcal{F}$ не содержит конечных множеств;
ii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$;
iii) $A \in \mathcal{F}$, $B \supseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{F}$;
iv) $\forall A \subseteq \mathbb{N}$ или $A \in \mathcal{F}$, или $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$.

7.6. Докажите, что любое семейство подмножеств $\mathbb{N}$ со свойствами i–iv из предыдущей задачи позволяет сопоставить всякой ограниченной последовательности (a_n) число $L(a_n)$ со следующими свойствами:
i) $L(a_n)$ является частичным пределом (a_n);
ii) $L(\alpha a_n) = \alpha L(a_n)$ для действительных α;
iii) $L(a_n + b_n) = L(a_n) + L(b_n)$.

7.7. Дано множество из $C_{2k-4}^{k-2} + 1$ различных действительных чисел. Докажите, что из этого множества можно выбрать монотонную последовательность $(x_i)_{i=1}^k$ такую, что

$$|x_{i+1} - x_1| \geq 2|x_i - x_1|$$

для всех $i = 2, \ldots, k-1$.

7.8. Пусть дан набор последовательностей $\mathcal{A}$ из нулей и единиц и функция $f : \{0,1\}^k \to \{0,1\}$. Известно, что всякая последовательность $(a_n) \in \mathcal{A}$ удовлетворяет соотношению

$$a_n = f(a_{n+1}, \ldots, a_{n+k})$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Каково максимальное (в зависимости от k) количество элементов в $\mathcal{A}$?

7.9. Пусть дана последовательность букв A (бесконечное вправо слово) из некоторого конечного алфавита. Докажите, что существует бесконечное вправо слово B с таким свойством: каждое начальное подслово B' слова B бесконечно много раз встречается как в A, так и в B.

7.10. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство конечных множеств. Докажите, что найдётся не менее $|\mathcal{F}|$ конечных множеств X со следующим свойством: любое подмножество $Y \subseteq X$ можно получить как пересечение $X \cap Z$, где $Z \in \mathcal{F}$ (заметьте, что это свойство имеется у пустого множества $X = \emptyset$).

7.11. Пусть n и m — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что количество способов поставить числа n и $-m$ в строку длиной $n+m$ так, чтобы сумма строки была нулевой, а сумма любого начального отрезка строки была неотрицательной, равно $\frac{1}{n+m}\binom{n+m}{n}$.

7.12. Докажите, что количество способов поставить числа 1 и -1 в строку длиной $2n$ так, чтобы сумма строки было нулевой, а сумма любого начального отрезка строки была неотрицательной, равно $\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

7.2. **Двоичный куб.**

7.13. Докажите, что за 15 вопросов с ответами только «да» и «нет» можно угадать число от 1 до 2014, даже если отвечающий на вопросы может один раз соврать.

7.14. Докажите, что за 15 вопросов с ответами только «да» и «нет» нельзя гарантированно узнать число от 1 до 2100, если отвечающий на вопросы может один раз соврать.

7.15. В пространстве $\mathbb{R}^n$ отмечены все 2^n точек, все координаты которых — нули или единицы. Затем некоторые пары этих точек соединены единичными отрезками так, что от любой точки до любой другой существует единственный путь по этим отрезкам. Докажите, что один из таких путей имеет длину, не меньшую $2n-1$.

7.16. Дан многочлен степени d от n переменных. Докажите, что либо он принимает ненулевые значения как минимум в 2^{n-d} вершинах куба $\{-1,1\}^n$, либо он принимает только нулевые значения в вершинах этого куба.

7.17. Докажите, что для любого целого $n \geq 2$ существует многочлен степени не более n с коэффициентами из $\{-1,0,1\}$, имеющий корень 1 кратности не менее $\left\lfloor \sqrt{\frac{n}{1000\log_2 n}} \right\rfloor$.

7.3. **Кубы и параллелепипеды.**

7.18. На плоскости дано семейство прямоугольников $\mathcal{F}$ со сторонами, параллельными осям координат, при этом прямоугольники попарно не перекрываются. Предположим, для некоторых $A, B > 0$ выполняется следующее. Для любого подсемейства $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

1) если проекции прямоугольников из $\mathcal{G}$ на $0x$ не перекрываются, то сумма ширин $\mathcal{G}$ не более A;

2) если проекции прямоугольников из $\mathcal{G}$ на $0y$ не перекрываются, то сумма высот $\mathcal{G}$ не более B.

Докажите, что прямоугольники можно переместить параллельными переносами так, что они окажутся в прямоугольнике $[0,A] \times [0,B]$ без перекрытий.

7.19. На плоскости нарисовано несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Докажите, что если каждые два прямоугольника можно пересечь вертикальной или горизонтальной прямой, то их все можно пересечь парой из вертикальной и горизонтальной прямой.

7.20. На плоскости нарисовано несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Докажите, что либо все прямоугольники можно пересечь двумя вертикальными и двумя горизонтальными прямыми, либо найдутся три прямоугольника, проекции которых на любую координатную ось не пересекаются.

7.21. Будем рассматривать единичные кубы в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными осям координат, и называть их просто «кубы». Пусть выбраны $2^{n-1}+1$ попарно непересекающихся кубов. Докажите, что либо не существует куба, пересекающегося с каждым из выбранных, либо все кубы, пересекающиеся с каждым из выбранных, имеют общую точку.

7.22. Пусть в $\mathbb{R}^n$ расположены единичные кубы, каждые два из которых пересекаются по множеству размерности $n-1$. Докажите, что их количество не более $n+1$.

7.4. **Покрытие и протыкание.**

7.23. Пусть $k, n \geq 2$ — натуральные числа. Будем говорить, что аффинная гиперплоскость $H \subset \mathbb{R}^n$ k-содержит конечное множество X, если $|X \setminus H| < k$. Докажите, что всякое множество Y, которое не k-содержится ни в какой гиперплоскости, содержит подмножество $Z \subseteq Y$ из не более чем kn элементов, которое тоже не k-содержится ни в одной гиперплоскости.

7.24. Пусть на плоскости нарисовано несколько окружностей, каждые 4 или менее из которых имеют общую точку. Докажите, что все они имеют общую точку.

7.25. Будем говорить, что семейство множеств $\mathcal{F}$ можно проткнуть t-элементным множеством, если существует t-элементное множество T, которое пересекает каждое $S \in \mathcal{F}$. Докажите, что если в $\mathbb{R}^n$ дано семейство сфер, каждые $\binom{t+n+1}{n+1}$ или менее из которых можно проткнуть t-элементным множеством, то их все можно проткнуть t-элементным множеством.

7.26. Рассмотрим множество X точек в $\mathbb{Z}^n$ с координатами в диапазоне от 1 до m. Пусть объединение множества гиперплоскостей $H_1 \cup \dots \cup H_N$ содержит все точки X кроме одной, и эту одну не содержит. Докажите, что $N \geq n(m-1)$.

7.27. Пусть на плоскости даны m красных и n синих прямых, причём количество точек красно-синего пересечения оказалось ровно nm, пусть это множество точек X. Докажите, что если X, кроме ровно одной точки, покрыто множеством зелёных прямых, то количество зелёных прямых не менее $m + n - 2$.

7.28. Пусть в матрице A размера $n \times n$ стоят неотрицательные числа, а суммы чисел во всех столбцах и строках равны 1. Докажите, что можно выбрать n элементов матрицы A, никакие два из которых не лежат в одной строке или в одном столбце так, что все они будут не менее α_n, где значение α_n определено как

$$\alpha_{2k} = \frac{1}{k^2 + k}, \ \alpha_{2k-1} = \frac{1}{k^2}.$$

Докажите, что числа α_n оптимальны и их нельзя уменьшить.

7.5. **Алгебраические задачи и методы.**

7.29. Пусть в множестве S из n элементов дано семейство $\mathcal{F}$ из $n+1$ непустого подмножества. Докажите, что это семейство можно разбить на три $\mathcal{F} = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} \sqcup \mathcal{C}$ так, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ непусты, и их объединения совпадают,

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{B}.$$

7.30. Даны две различные последовательности из нулей и единиц длины n. Докажите, что найдутся натуральное число $m \leq 5\sqrt{n}$ и остаток a по модулю m такие, что последовательности отличаются по количеству единиц, стоящих на местах, номера которых сравнимы с a по модулю m.

7.31. Пусть A и B — непустые подмножества конечного поля $\mathbb{F}_p$, а C — множество их сумм $C = A + B = \{a + b : a \in A, \ b \in B\}$. Докажите неравенство про мощность этих множеств:

$$|C| \geq \min\{|A| + |B| - 1, p\}.$$

7.32. Пусть $a_1, \dots, a_k$ — попарно различные положительные действительные числа. Рассмотрим всевозможные суммы $\sum_{i \in I} a_i$ по подмножествам $I \subseteq \{1, \dots, k\}$, пустая сумма считается равной нулю. Докажите, что среди этих сумм найдутся не менее $k(k+1)/2 + 1$ попарно различных чисел.

7.33. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ — конечное множество натуральных чисел. Обозначим A_k множество сумм с целыми неотрицательными коэффициентами

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_ma_m, \quad x_1 + \cdots + x_m \le k.$$

Докажите, что найдутся такие целые числа k_0, a, b, что для любого $k \ge k_0$ имеет место равенство для мощности множества: $|A_k| = ak + b$.

7.34. Пусть натуральные числа раскрашены в конечное число цветов. Докажите, что для всякого натурального ℓ найдётся последовательность натуральных чисел $n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_\ell$ и число t со следующим свойством: все сдвинутые на t суммы всех её непустых подпоследовательностей, $t + n_{i_1} + n_{i_2} + \cdots + n_{i_k}$, имеют один и тот же цвет.

7.35. Пусть A — конечное подмножество некоторой абелевой группы G, для которого $|A + A| \le c|A|$ при некотором действительном $c \ge 1$. Докажите, что для всякого натурального k получится

$$|\underbrace{A + \cdots + A}_{k}| \le c^k|A|.$$

7.36. Пусть многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ имеет степень не более $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, где c_i — неотрицательные целые числа. Пусть C — это коэффициент при $x_1^{c_1} \ldots x_n^{c_n}$ в f. Пусть A_1, A_2, $\ldots$, A_n — некоторые подмножества $\mathbb{F}$ размеров $|A_i| = c_i + 1$ соответственно. Обозначим также $\varphi_i(x) = \prod_{\alpha \in A_i}(x - \alpha)$.

Докажите, что

$$C = \sum_{\alpha_i \in A_i} \frac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\varphi_1'(\alpha_1) \ldots \varphi_n'(\alpha_n)}.$$

В частности, если $C \ne 0$, то для некоторой системы представителей $\alpha_i \in A_i$ окажется $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \ne 0$. И наоборот, если $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \ne 0$ ровно для одной системы представителей, то $C \ne 0$.

7.37. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — натуральные числа. Докажите, что свободный коэффициент в многочлене Лорана

$$\prod_{i \ne j} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right)^{a_i}$$

равен мультиномиальному коэффициенту

$$\binom{a_1 + \cdots + a_n}{a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_n} = \frac{(a_1 + \cdots + a_n)!}{\prod_{i=1}^n a_i!}.$$

7.38. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — натуральные числа, а $b_i = \left(\sum_j a_j\right) - a_i$. Докажите, что коэффициент при мономе $x_1^{b_1} \ldots x_n^{b_n}$ в многочлене

$$\prod_{i<j} \left(\prod_{s=0}^{a_i - 1} (x_j - q^s x_i) \prod_{t=1}^{a_j} (x_i - q^t x_j) \right)$$

с параметром q равен q-мультиномиальному коэффициенту

$$\binom{a_1 + \cdots + a_n}{a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_n}_q = \frac{\prod_{s=1}^{a_1 + \cdots + a_n} (1 - q^s)}{\prod_{i=1}^n \prod_{t=1}^{a_i} (1 - q^t)}.$$

8. Геометрия

8.1. **Разные задачи.**

8.1. Пусть смешанное произведение трёх векторов $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ по модулю не менее 1. Докажите, что векторное произведение какой-то пары из этих векторов по модулю не менее 1.

8.2. Пусть в $\mathbb{R}^3$ даны n прямых. Докажите, что существует ненулевой многочлен степени $\leq 3\sqrt{n}$, который обнуляется на всех прямых.

8.3. Докажите неравенство для положительных a, b, c, d:

$$\sqrt{a^2+b^2+2/3ab}\sqrt{c^2+d^2+2/3cd}+\sqrt{a^2+d^2+2/3ad}\sqrt{b^2+c^2+2/3bc} > \\ > \sqrt{a^2+c^2+2/3ac}\sqrt{b^2+d^2+2/3bd}.$$

8.4. Пусть сечение конуса $x^2+y^2=z^2$ $(z \geq 0)$ плоскостью является эллипсом. Докажите, что у проекции этого эллипса на плоскость $0xy$ начало координат является фокусом.

8.5. На проволочную единичную окружность паук натянул паутину. Паутина представляет из себя плоский граф с прямыми рёбрами в круге, ограниченном данной окружностью; из вершин графа, лежащих на окружности, ребро выходит внутрь окружности перпендикулярно ей; а в каждой вершине графа внутри круга сумма единичных исходящих касательных векторов к рёбрам графа нулевая. Докажите, что длина паутины равна количеству её вершин на окружности.

8.6. Рассмотрим аффинное преобразование $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Докажите, что существует аффинная гиперплоскость $H \subset \mathbb{R}^n$ со следующим свойством: при любом $x \in \mathbb{R}^n$ отрезок $[x, Ax]$ пересекает H.

8.7. Пусть K — компактное подмножество евклидова пространства, а $f : K \to K$ — отображение, такое что $|f(x)-f(y)| \geq |x-y|$ для любых $x, y \in K$. Докажите, что f на самом деле сохраняет расстояния.

8.8. На каждом ребре трёхгранного угла с вершиной O отметили по паре точек: (A_1, A_2), (B_1, B_2) и (C_1, C_2). Точки A_3, B_3 и C_3 — середины отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 соответственно. Докажите, что пересечение тетраэдров $OA_1B_1C_1$ и $OA_2B_2C_2$ содержится внутри тетраэдра $OA_3B_3C_3$.

8.9. В Средиземном море есть четыре острова α, β, γ и δ, на которых живут математики А, В, Г и Δ. Как-то утром, они решили, что каждый обойдёт свой остров один раз против часовой стрелки, причём так, что всё время их положения будут образовывать квадрат АВГΔ. Удивительно, но им это удалось. Найдите площадь острова δ, если известны площади островов α, β и γ.

8.10. В пространстве $\mathbb{R}^d$ расположены попарно различные точки $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, причём $d \leq 2n-2$. Оказалось, что расстояния

$$|x_1-y_1| = |x_2-y_2| = \dots = |x_n-y_n| = a,$$

а остальные расстояния между парами разных точек из нашего набора равны некоторому числу b. Докажите, что все точки лежат в некотором n-мерном аффинном подпространстве $A \subset \mathbb{R}^d$.

8.11. Пусть начало координат лежит строго внутри симплекса в $\mathbb{R}^n$ с вершинами $v_0, \dots, v_n$. Докажите, что существует не менее n пар $i < j$ таких, что $\angle v_i 0 v_j > 90°$.

8.12. На плоскости нарисован связный граф G отрезками, пересекающимися только по концам. Предположим, что любые две точки x, y в вершинах или рёбрах графа, расстояние между которыми на плоскости $|xy|$, соединяет путь в графе длины меньшей, чем $\frac{\pi}{2}|xy|$. Докажите, что в этом случае G — дерево.

8.13. Пусть гладкая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет нулевой дифференциал (градиент) в каждой точке связного компактного множества $X \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что она постоянна на X.

8.14. Рассмотрим набор $\{h_1, \dots, h_n\}$ аффинных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^d$ и ортогональные проекции $\pi_1, \dots, \pi_n$ на соответствующие гиперплоскости. Докажите,что существует константа C такая, что для любой последовательности индексов $\alpha = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ из множества $\{1, 2, \dots, n\}$ композиция

$$\pi_\alpha = \pi_{i_1} \circ \pi_{i_2} \circ \dots \circ \pi_{i_m}$$

имеет свойство: $|\pi_\alpha(0)| < C$.

8.2. **Выпуклая геометрия.**

8.15. Внутри острого выпуклого конуса $C \subset \mathbb{R}^n$ дана точка m. Докажите, что существует единственная гиперплоскость H, которая отрезает от C пирамиду с центром масс m.

8.16. Трёхмерный выпуклый многогранник комбинаторно эквивалентен правильному октаэдру, то есть имеет 8 вершин, из каждой выходит по 4 ребра, и грани являются треугольниками. Его грани раскрашены в чёрный и белый цвета так, что соседние по ребру грани разноцветны. Оказалось, что при каждой вершине сумма чёрных углов равна сумме белых. Докажите, что сумма площадей чёрных граней равна сумме площадей белых.

8.17. Пусть симплекс $S \subset \mathbb{R}^n$ содержит стандартный единичный куб $[0, 1]^n$. Докажите, что S содержит отрезок длины n, параллельный одной из координатных осей.

8.18. Для выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ назовём точку $x \in \partial K$ *сильно крайней*, если найдётся шар $B \supseteq K$, такой что $x \in \partial B$. Докажите, что K равно замыканию выпуклой оболочки своих сильно крайних точек.

8.19. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — центрально симметричное выпуклое тело. Докажите, что эллипсоид максимального объёма E, содержащийся в K, единственный и обладает свойством $E \subseteq K \subseteq \sqrt{n}E$.

8.20. В пространстве $\mathbb{R}^n$ с некоторой нормой даны несколько векторов $v_1, \dots, v_N$, норма каждого не более 1. Докажите, что можно выбрать знаки так, что выражение

$$v_1 \pm v_2 \pm \dots \pm v_N$$

будет вектором нормы не более n.

8.21. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ даны несколько векторов $v_1, \dots, v_N$, длина каждого не более 1. Докажите, что можно выбрать знаки так, что выражение

$$v_1 \pm v_2 \pm \dots \pm v_N$$

будет вектором длины не более $\sqrt{n}$.

8.22. Существует ли такое выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^n$, что всякое выпуклое тело на плоскости $\mathbb{R}^2$ является его сечением $A \cap K$ двумерным аффинным подпространством $A \subset \mathbb{R}^n$ с точностью до аффинного преобразования? (Сечение обязано пересекать внутренность K)

8.3. **Триангуляции и близкие вопросы.**

8.23. Докажите, что если n-угольник можно триангулировать так, что степени всех вершин триангуляции (включая исходные вершины n-угольника) будут чётными, то n делится на 3.

8.24. Пусть дано множество точек на плоскости X, содержащее n точек. Докажите, что X можно покрасить в $10 \ln n$ цветов с выполнением следующего условия: для любого круга D, пересекающего X, найдётся цвет c такой, что D содержит ровно одну точку цвета c.

8.25. Докажите, что у всякого выпуклого многоугольника $P = A_1, \dots, A_n, A_1$ на плоскости найдётся как минимум две вершины A_i со следующим свойством: описанный круг треугольника $\triangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ (индексы по кругу) не содержит вершин A_j внутри себя.

8.26. Докажите, что у всякого выпуклого многоугольника $P = A_1, \dots, A_n, A_1$ на плоскости найдётся как минимум две вершины A_i со следующим свойством: P содержится в описанном круге треугольника $\triangle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ (индексы по кругу).

8.27. Докажите, что у всякой замкнутой дважды дифференцируемой выпуклой кривой на плоскости есть не менее двух минимумов и не менее двух максимумов кривизны.

8.28. Докажите, что параллелепипед с основанием в плоскости $0xy$ нельзя разрезать на тетраэдры, каждый из которых имеет грань, параллельную $0xy$.

8.29. Докажите, что если у многогранника $P \subset \mathbb{R}^3$ более 12 граней, то некоторая его грань имеет не менее 6 сторон.

8.30. Докажите, что многогранник $P \subset \mathbb{R}^3$ с n вершинами нельзя разрезать менее чем на $n-3$ тетраэдра.

8.31. Выпуклый многогранник M с треугольными гранями разрезан на тетраэдры; все вершины тетраэдров являются вершинами многогранника, и любые два тетраэдра либо не пересекаются, либо пересекаются по общей вершине, общему ребру или общей грани. Докажите, что не может оказаться, что у каждого тетраэдра ровно одна грань лежит на поверхности M.

8.32. Можно ли расположить в пространстве $\mathbb{R}^3$ тысячу попарно не перекрывающихся многогранников, которые будут попарно касаться (то есть иметь общую часть грани положительной площади)? Можно ли сделать это так, чтобы многогранники оказались равными?

8.33. Пусть многоугольник $P \subset \mathbb{R}^2$ разбит на треугольники $T_1, \dots, T_N$. Для каждого треугольника рассмотрим его центр описанной окружности $c(T_i)$ и его площадь $\operatorname{vol} T_i$. Докажите, что вектор

$$c(P) = \frac{\sum_i \operatorname{vol} T_i \cdot c(T_i)}{\sum_i \operatorname{vol} T_i}$$

зависит только от P и не зависит от его разбиения на треугольники.

8.34. Докажите аналогичное утверждение для разбиения многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ на симплексы.

8.4. **Покрытия и упаковки.**

8.35. При каких n пространство $\mathbb{R}^n$ можно разбить на единичные n-мерные кубы и покрасить кубы в $n+1$ цвет так, чтобы (замкнутые) кубы одного и того же цвета не пересекались?

8.36. Пусть многогранник $P \subset \mathbb{R}^n$ с гипергранями $F_1, \dots, F_m$ содержит начало координат, а конусы $C_1, \dots, C_m$ с вершиной в нуле построены так, что конус C_i состоит из лучей, проходящих через гипергрань F_i из начала координат. Докажите, что любой набор точек $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ можно перенумеровать так, что сдвинутые конусы $\{x_i + C_i\}$ попарно не перекрываются.

8.37. Пусть многогранник $P \subset \mathbb{R}^n$ с гипергранями $F_1, \dots, F_m$ содержит начало координат, а конусы $C_1, \dots, C_m$ с вершиной в нуле построены так, что конус C_i состоит из лучей, проходящих через гипергрань F_i из начала координат. Докажите, что любой набор точек $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ можно перенумеровать так, что сдвинутые конусы $\{x_i + C_i\}$ покрывают всё пространство $\mathbb{R}^n$.

8.38. Докажите, что $\mathbb{R}^3$ можно разбить на пять конусов с вершиной в нуле так, что предыдущие утверждения не будут верны для этой системы конусов и некоторого набора из пяти точек $x_1, \dots, x_5$.

8.39. На плоскости $\mathbb{R}^2$ обозначено несколько квадратов со сторонами 1×1, параллельными координатным осям, и их количество нечётно. Докажите, что множество точек плоскости, которые накрыты нечётным количеством обозначенных квадратов, имеет площадь не менее 1.

8.40. Пусть кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ задана параметрически как $\bar{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, причём параметризация удовлетворяет условию Гёльдера

$$|\bar{r}(t) - \bar{r}(s)| \le C|t - s|^\alpha$$

с $C > 0$ и показателем $\alpha > 1/2$. Докажите, что Γ не может замести единичный квадрат.

8.41. Пусть на плоскости дан правильный треугольник K. Докажите, что для всякого положительного P найдётся $\varepsilon > 0$ с таким свойством: если в треугольник K помещены несколько неперекрывающихся треугольников $K_1, \dots, K_N$, отрицательно гомотетичных K, попарно не перекрывающихся, и оставляющих непокрытой не более ε площади K, то их суммарный периметр не менее P.

8.42. Пусть в $\mathbb{R}^n$ есть конечное семейство шаров $B_1, \dots, B_N$, возможно разных радиусов. Докажите, что можно выбрать подсемейство $B_{i_1}, \dots, B_{i_M}$ попарно непересекающихся шаров так, что

$$\operatorname{vol} \bigcup_{j=1}^{M} B_{i_j} \ge 3^{-n} \operatorname{vol} \bigcup_{i=1}^{N} B_i.$$

8.43. В трёхмерном кубе единичного размера даны $2n$ точек. Докажите, что точки можно разбить на пары так, что сумма кубов расстояний в парах будет не более 200.

8.44. Рассмотрим непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$ семейство шаров $\{B_{x_i(t)}(r_i)\}_{i=1}^N$, у которых центры меняются так, что $|x_i(t) - x_j(t)|$ (не обязательно строго) возрастает для любых i и j, а радиусы остаются постоянными. Докажите, что

$$\operatorname{vol} \bigcup_{i=1}^{N} B_{x_i(t)}(r_i)$$

(не обязательно строго) возрастает.

8.45. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ нельзя расположить больше $n+1$ единичного вектора с тупыми углами между любой парой векторов.

8.46. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ нельзя расположить больше $2n$ единичных векторов с неострыми углами между любой парой векторов.

8.47. Пусть $v_1, \dots, v_n$ — единичные вектора в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Докажите, что найдётся такой единичный вектор u, что для любого $i = 1, \dots, n$ будет

$$|(u, v_i)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

8.48. Можно ли найти такое натуральное число N и множество точек $X \subset \mathbb{R}^2$ со следующим свойством: для всякого выпуклого многоугольника K площади 1 пересечение $K \cap X$ содержит от 1 до N точек?

8.49. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — центрально симметричное выпуклое тело. Докажите, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно разместить неперекрывающиеся параллельные переносы K так, что плотность покрытия будет не менее 2^{-n+1}. Последнее означает, что для всякого шара $B_0(R)$ доля объёма шара, покрытого этими параллельными переносами K, будет не менее $2^{-n+1} + o(1)$ при $R \to +\infty$.

8.50. Докажите, что на плоскости нельзя разместить параллельные переносы одного и того же треугольника так, чтобы плотность покрытия (см. определение выше) была больше 2/3.

8.51. Предположим, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ можно разместить N единичных шаров так, что они не перекрываются (не пересекаются по внутренностям) и все касаются ещё одного единичного шара с центром в начале координат. Докажите, что для любого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ можно разместить N неперекрывающихся копий K (разрешаются ортогональные преобразования и параллельные переносы) так, что они все будут касаться исходного K.

8.52. Предположим, удалось найти функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такую, что $f(x) \leq 0$ при $|x| \geq 2$ и преобразование Фурье f везде неотрицательно. Докажите, что тогда нельзя упаковать одинаковые шары в $\mathbb{R}^n$ с плотностью более, чем

$$\frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} \cdot \frac{f(0)}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx_1 \dots dx_n}.$$