

- (1) Основы дифференциальной геометрии. Гладкие отображения открытых подмножеств \mathbb{R}^n , теорема об обратном отображении и криволинейные системы координат.
- (2) Вложенные в \mathbb{R}^n гладкие многообразия и абстрактное определение гладкого многообразия. Гладкие функции на гладком многообразии и разбиение единицы. Гладкие отображения между гладкими многообразиями и диффеоморфизмы. Классификация одномерных компактных многообразий с точностью до диффеоморфизма.
- (3) Определение касательного вектора в точке как дифференцирования функций. Геометрическое определение касательного вектора. Касательное и кокасательное расслоение гладкого многообразия. Векторные поля и тензоры.
- (4) Дифференциальные формы первой и высших степеней. Внешнее дифференцирование, его существование и единственность. Тождество $d^2 = 0$.
- (5) Интегрирование дифференциальных форм степени n с компактным носителем в \mathbb{R}^n , условие гомологичности двух форм через интеграл, замена координат. Интегрирование дифференциальных форм с компактным носителем по ориентированному многообразию, формула Стокса.
- (6) Интегрирование векторных полей, однопараметрические группы диффеоморфизмов. Формулы для производной Ли дифференциальных форм и векторных полей. Скобка Ли векторных полей и тождество Якоби для неё.
- (7) Понятие о группах и алгебрах Ли, левоинвариантные векторные поля и однопараметрические подгруппы. Мера Хаара на группах Ли и усреднение по компактной группе Ли.
- (8) Теорема Фробениуса об интегрируемости систем векторных полей. Поля касательных подпространств и слоения, тензор кривизны поля касательных подпространств. Подгруппы групп Ли и отображения между группами Ли.
- (9) Когомологии де Рама многообразия. Их функториальность относительно классов гомотопии гладких отображений, вычисление для стягиваемых пространств. Когомологии с компактным носителем. Сравнение с другими теориями гомологий.
- (10) Критические и регулярные значения гладкого отображения, теорема Сарда. Степень гладкого отображения между компактными многообразиями равных размерностей, корректность её определения. Определение степени через когомологии. Теорема Брауэра о неподвижной точке.
- (11) Обзор базовых понятий римановой геометрии. Риманова структура и риманова метрики, функционалы длины и энергии. Риманов объём. Ковариантная производная векторного поля, уравнения геодезической.
- (12) Экспоненциальное отображение на (полу)римановом многообразии и выпуклые окрестности. Полнота и геодезическая полнота риманова многообразия. Трубочатые окрестности подмногообразий, объём трубочатой окрестности в первом приближении.
- (13) Вторая вариация геодезической, тензор кривизны Римана, скалярная кривизна и кривизна Риччи.
- (14) Модельные пространства римановой геометрии. Сфера и гиперболическое пространства. Метрика Фубини–Штуди на комплексном проективном пространстве, её совместимость с комплексной структурой.
- (15) Линейная симплектическая геометрия, канонический вид кососимметричной формы, её вырожденность и невырожденность. Лагранжевы подпространства. Связь между комплексными структурами и положительными метриками. Симплектическая «диагонализация» положительно определённых квадратичных форм.

- (16) Симплектические многообразия, ориентируемость, симплектический объём. Деформации симплектических структур, метод Мозера для порождения деформации векторным полем и теорема Дарбу о локальном виде симплектического многообразия.
- (17) Кокасательное расслоение и его каноническая симплектическая структура. Преобразование Лежандра выпуклых функций и гамильтонов формализм классической механики, лагранжево и гамильтоново действие.
- (18) Гамильтоновы векторные поля и векторные поля, сохраняющие симплектическую форму. Скобка Пуассона функций, алгебра Ли функций на симплектическом многообразии. Гамильтониан гармонического осциллятора и периодические траектории его векторного поля.
- (19) Строение окрестностей лагранжевых подмногообразий, деформаций лагранжевых подмногообразий и симплектоморфизмов, близких к тождественному. Задание лагранжевых многообразий в кокасательном расслоении через графики дифференциалов функций на базе, а также с помощью послойных критических точек функций на произведении многообразия и евклидова пространства.
- (20) Понятие о контактных формах и контактных структурах. Поверхности контактного типа в стандартном \mathbb{R}^{2n} , стандартная контактная структура на нечётномерной сфере. Векторное поле Роба и его вариационное описание. Гамильтонианы контактоморфизмов. Теорема Грея о стабильности.
- (21) Почти комплексные структуры и римановы метрики, совместимые с симплектической структурой, их существование и «гомотопическая единственность». Интегрируемость почти комплексных структур и кэлеровы многообразия. Форма Фубини–Штуди на проективном пространстве. Неравенство между римановым объёмом и симплектическим объёмом подмногообразий, минимальность комплексных подмногообразий кэлерова многообразия.
- (22) Основы теории Морса для гладких многообразий. Теорема Тома о трансверсальности, существование функций с только невырожденными критическими точками. Лемма Морса о локальном строении невырожденной критической точки.
- (23) Градиентный поток функции, индексы критических точек и критических подмногообразий, приклеивание ручек. Оценки количества невырожденных критических точек через гомологии многообразия. Лемма о склеивании, комплекс Морса и гомологии Морса.
- (24) Изучение геодезических на римановых многообразиях с помощью теории Морса в пространстве путей или петель. Существование замкнутых геодезических, дискретизация и переход к конечномерному подпространству в пространстве петель. Теория Люстерника–Шнирельмана для вырожденных критических значений, результаты про замкнутые геодезические на сфере.
- (25) Связь геодезических на римановых и финслеровых многообразиях с контактной и симплектической геометрией. Лемма Пуанкаре–Биркгофа о неподвижных точках и ещё раз про замкнутые геодезические на двумерной сфере.
- (26) Симплектические и гамильтоновы действия групп на многообразии и отображение момента. Совместимые риманова метрика и комплексная структура, инвариантные относительно действия группы. Строение множества неподвижных точек изометричного действия группы на многообразии.
- (27) Теорема Дарбу в окрестности неподвижной точки симплектического действия компактной группы Ли. Критические точки гамильтониана действия окружности и действия тора. Выпуклость образа отображения момента для действий тора. Торические многообразия и их алгебраическая конструкция.
- (28) Накрытие $S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ как классифицирующее пространство для группы S^1 , дифференциальные формы на нём. Кусочная полиномиальность для формы объёма при отображении момента и формула Дюйстермаата–Хекмана. Преобразование Фурье характеристической функции многогранника.

- (29) Проблемы существования замкнутых траекторий гамильтоновых систем и неподвижных точек гамильтоновых симплектоморфизмов. Гипотеза Арнольда и обзор продвижений по ней. Действие неподвижной точки гамильтонова симплектоморфизма и его независимость от гамильтониана. Трудности применения теории Морса к замкнутым петлям с функционалом действия.
- (30) Периодические траектории выпуклых гамильтонианов и замкнутые характеристики на границе гладкого выпуклого тела в \mathbb{R}^{2n} . Двойственность Кларка.
- (31) Гамильтоновы симплектоморфизмы, близкие к тождественному, и их производящие функции. Производящие функции симплектоморфизмов, гомотопных тождественному по Витербо. Теория Морса для производящих функций, “action selectors” Витербо для гамильтоновых симплектоморфизмов с компактным носителем в \mathbb{R}^{2n} , их субаддитивность.
- (32) Аксиоматические симплектические ёмкости, существование ёмкостей из теоремы Громова о несжимаемости. Ёмкость эллипсоидов и характеристика симплектоморфизмов в терминах сохранения ёмкостей. Ёмкости, определяемые через “action selector”, примеры ёмкостей Витербо и Хофера–Цендера. Норма Хофера гамильтонова симплектоморфизма, энергия смещения области. Неравенство между энергией смещения области и ёмкостью.

Лекции по курсу будут иногда проходить по четвергам в 10:45 в аудитории 117 ГК, первая лекция в весеннем семестре 2018 года состоится 8 февраля, далее график будет определяться динамически. Всем, кто собирается посещать и/или сдавать курс, рекомендуется сообщить о себе по адресу r_n_karasev@mail.ru для получения рассылки.

Основными учебниками являются [1, 2, 3] (на русском языке) и [7].

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО КУРСУ

- [1] Ш. Стернберг. *Лекции по дифференциальной геометрии*. Мир, 1970.
- [2] Ф. Уорнер. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*. Мир, 1987.
- [3] Д. Макдафф, Д. Саламон. *Введение в симплектическую топологию*. R&C Dynamics, Москва–Ижевск, 2012.
- [4] Дж. Милнор. *Теория Морса*. Мир, 1965.
- [5] M. F. Atiyah. Convexity and commuting Hamiltonians. *Bull. London Math. Soc.* 14 (1982), 1–15.
- [6] M. F. Atiyah, R. Bott. The moment map and equivariant cohomology. *Topology* 23:1 (1984), 1–28.
- [7] A. Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics 1764, Springer, 2008.
- [8] F. H. Clarke. A classical variational principle for periodic Hamiltonian trajectories. *Proceedings of the American Mathematical Society* 76:1 (1979), 186–188.
- [9] H. Hofer, E. Zehnder. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Birkhäuser, 1994.
- [10] H. Geiges. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 109, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [11] C. Viterbo. Symplectic topology as the geometry of generating functions. *Mathematische Annalen* 292 (1992), 685–710.