1. Гладкие многообразия, разбиение единицы и отображения

1.1. Придумайте две разные гладкие структуры на топологическом пространстве $\mathbb{R}^1$.

1.2. Опишите все компактные одномерные гладкие многообразия (возможно с краем) с точностью до диффеоморфизма. Рассмотрите карты, отображающие области многообразия на интервалы прямой, посмотрите как две карты могут пересекаться.

1.3. * Опишите все не обязательно компактные одномерные гладкие многообразия (возможно с краем) с точностью до диффеоморфизма.

1.4. * Докажите, что между любыми двумя гладкими структурами на топологическом пространстве $\mathbb{R}^2$ существует диффеоморфизм.

1.5. Объясните, как разрезать сферу $\mathbb{S}^3$ на два многообразия с краем, диффеоморфные полным торам.

1.6. Докажите, что тор $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ можно вложить в $\mathbb{R}^{n+1}$.

1.7. Докажите, что если отображение $f : M \to \mathbb{R}^n$ гладких многообразий инъективно, $\operatorname{rk} Df \equiv \dim M$ всюду и M компактно, то его образ $f(M)$ является вложенным в $\mathbb{R}^n$ многообразием.

1.8. Докажите, что для любых двух разных точек гладкого многообразия M существует гладкая функция $f : M \to \mathbb{R}$, которая принимает разные значения в этих точках.

1.9. Проверьте, что в вашем решении предыдущей задачи используется свойство отделимости (две разные точки имеют непересекающиеся окрестности). Приведите пример топологического пространства, удовлетворяющего всем свойствам многообразия, кроме отделимости, для которого предыдущая задача не имеет решения.

1.10. Докажите, что для любого покрытия $\{U_\alpha\}_\alpha$ многообразия M найдётся набор неотрицательных гладких функций $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ таких, что

$$\forall \alpha \ \operatorname{supp} \rho_\alpha \subset U_\alpha$$

и

$$\forall x \in M \ \sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1$$

(сумма конечна при каждом x). Это называется *разбиение единицы*.

1.11. Докажите, что гладкие отображения между многообразиями $M \to N$ находятся в однозначном соответствии с *гомоморфизмами алгебр* $C^\infty(N) \to C^\infty(M)$, то есть отображениями колец функций, сохраняющих сложение, умножение, и переводящих константу в ту же константу.

1.12. С какими алгебраическими объектами находятся в однозначном соответствии точки многообразия M?

2. Векторные поля — определение

2.1. Докажите, что всякую гладкую функцию в окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$$

с гладкими g_i.

2.2. Определим *касательный вектор* в точке $p \in \mathbb{R}^n$ как $\mathbb{R}$-линейное отображение $X : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

Докажите, что размерность пространства касательных векторов в точке $T_p\mathbb{R}^n$ равна n. Докажите, что касательное пространство в точке не изменится, если заменить $\mathbb{R}^n$ на произвольную окрестность $U \ni p$.

2.3. Докажите, что для открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$-линейное отображение $X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, удовлетворяющее соотношению

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

задаётся *векторным полем* на U, то есть семейством гладко зависящих от точки касательных векторов в точке. Докажите, что в локальной системе координат на U векторное поле можно задать как

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

где коэффициенты X_i являются гладкими функциями.

2.4. Докажите, что для всякого гладкого отображения между многообразиями $\varphi : M \to N$ определено отображение касательных векторов, переводящее вектор X на M в вектор $\varphi_* X$ на N по формуле

$$\varphi_*(X)f = X(f \circ \varphi).$$

Выпишите, как это отображение выглядит в явном виде в координатах.

2.5. Заметьте, что всякая гладкая функция $f \in C^\infty(M)$ может быть рассмотрена как отображение $M \to \mathbb{R}$ и тогда f_* из предыдущего определения даёт дифференциал $d_p f : T_p M \to \mathbb{R}$ в любой точке $p \in M$, и такие дифференциалы порождают всякое кокасательное пространство $T_p^* M$ в точке $p \in M$.

3. Дифференциальные формы — определение и дифференцирование

3.1. Определим *дифференциальную форму степени* k на многообразии M как отображение наборов из k гладких векторных полей $X_1, \dots, X_k$ на M в бесконечно гладкие функции на M, $(X_1, \dots, X_k) \to \alpha(X_1, \dots, X_k)$, линейное по каждому аргументу и относительно умножения на бесконечно гладкие функции, то есть

$$\alpha(f_1 X_1, \dots, f_k X_k) = f_1 \dots f_k \alpha(X_1, \dots, X_k),$$

и кососимметричное, то есть меняющее знак при перестановке любых двух своих аргументов. Докажите, что задать дифференциальную форму степени k — это то же самое, что задать в каждой точке $p \in M$ полилинейное кососимметричное отображение

$$\alpha_p : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{k} \to \mathbb{R},$$

гладко зависящее от точки p. Множество таких форм обозначим $\Omega^k(M)$.

3.2. Докажите, что для всякой $f \in C^\infty(M)$ её дифференциал можно считать формой первой степени в соответствии с формулой

$$df(X) = X(f).$$

3.3. Для всякой $f \in C^\infty(M)$ попробуйте определить *гессиан* (второй дифференциал) в точке p как квадратичную форму на $T_p M$, не зависящую от системы координат. Убедитесь, что это возможно только при $df = 0$ в точке p.

3.4. Какой коэффициент $c_{k,\ell}$ надо подобрать в определении внешнего умножения кососимметричных полилинейных форм

$$(\alpha\wedge\beta)(X_1,\dots,X_{k+\ell}) = c_{k,\ell}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+\ell}}(\operatorname{sgn}\sigma)\alpha(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k)})\beta(X_{\sigma(k+1)},\dots,X_{\sigma(\ell)})$$

чтобы выполнялась ассоциативность умножения и условие нормировки

$$(dx_1\wedge\dots\wedge dx_k)\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = 1?$$

3.5. Пусть $U\subseteq\mathbb{R}^n$ — область. Докажите, что на гладких дифференциальных формах на U существует единственный $\mathbb{R}$-линейный оператор d, повышающий степень формы на 1 и удовлетворяющий условиям: а) для функций df является дифференциалом; б) $d^2=0$; в) $d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-1)^{\deg\alpha}\alpha\wedge d\beta$.

4. Дифференциальные формы — интегрирование

4.1. Для гладкой формы с компактным носителем $\nu = a(x)dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$ на пространстве $\mathbb{R}^n$ (иначе говоря $\nu\in\Omega^n_c(\mathbb{R}^n)$) определим (например, через кратный интеграл Римана)

$$\int_{\mathbb{R}^n}\nu := \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\ dx_1\dots dx_n.$$

Докажите, что если $\nu = d\lambda$ и $\lambda\in\Omega^{n-1}_c(\mathbb{R}^n)$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n}\nu = 0.$$

4.2. Пусть $\varphi(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ — функция с компактным носителем и единичным интегралом. Докажите, что для всякой $\nu\in\Omega^n_c(\mathbb{R}^n)$ найдётся число I и форма $\lambda\in\Omega^{n-1}_c(\mathbb{R}^n)$, такие что

$$\nu = I\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)dx_1\wedge\dots\wedge dx_n + d\lambda.$$

4.3. Докажите, что факторпространство $\Omega^n_c(\mathbb{R}^n)/d\Omega^{n-1}_c(\mathbb{R}^n)$ одномерно, то есть всевозможные способы определить интеграл формы $\nu\in\Omega^n_c(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы интеграл от $d\lambda$ равнялся нулю, могут отличаться только умножением на константу.

4.4. Докажите, что для всякого гладкого отображения между многообразиями $\varphi: M\to N$ определено отображение дифференциальных форм $\varphi^*:\Omega^k(N)\to\Omega^k(M)$, действующее по формуле

$$\varphi^*\alpha(X_1,\dots,X_k) = \alpha(\varphi_*X_1,\dots,\varphi_*X_k).$$

Выпишите, как это отображение выглядит в явном виде в координатах при $k=\dim M = \dim N$, и может быть в некоторых других случаях. Докажите, что оно коммутирует с оператором d.

4.5 (Замена переменных в кратном интеграле). Рассмотрим гладкое отображение $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ с компактным носителем, то есть $\varphi(x)=x$ за пределами некоторого компактного множества. Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^*\nu = \int_{\mathbb{R}^n}\nu.$$

Какая формула получится, если мы представим ν в виде $a(x)dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$ и выпишем $\varphi^*\nu$ через якобиан φ?

4.6. Докажите, что гладкое отображение $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ с компактным носителем сюръективно.

4.7. Докажите, что для любого покрытия $\{U_\alpha\}_\alpha$ многообразия M найдётся набор неотрицательных гладких функций $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ таких, что

$$\forall\alpha\ \operatorname{supp}\rho_\alpha \subset U_\alpha$$

и

$$\forall x \in M\ \sum_\alpha \rho_\alpha(x) = 1$$

(сумма конечна при каждом x). Это называется *разбиение единицы.* Рассмотрите случай компактного M, когда это утверждение намного проще.

4.8. Докажите, что n-мерное многообразие M ориентируемо тогда и только тогда, когда существует дифференциальная форма $\nu \in \Omega^n(M)$, которая ни в одной точке не равна нулю.

4.9. Для n-мерного многообразия с краем M назовём ориентации M и края ∂M согласованными, если в локальной системе координат $x_1, \dots, x_n$ в окрестности некоторой точки края M задано неравенством $x_n \geq 0$, а ∂M — соответственно равенством $x_n = 0$, ориентация M положительна относительно $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, а ориентация ∂M положительна относительно $(-1)^n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$. Докажите, что это согласование не зависит от выбора системы координат.

4.10 (Формула Стокса). Докажите для ориентированного многообразия с краем $(M, \partial M)$ размерности n и формы с компактным носителем на нём α степени $n-1$

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

4.11. Докажите, что площадь области, ограниченной замкнутой гладкой кривой без самопересечений $C \subset \mathbb{R}^2$, можно посчитать по формуле:

$$A = \pm \int_C x dy,$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации кривой.

4.12. Докажите, что объём области в $\mathbb{R}^3$, ограниченной гладкой связной вложенной поверхностью без края $S \subset \mathbb{R}^3$, можно посчитать по формуле:

$$V = \pm \int_S x dy \wedge dz,$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации поверхности.

5. Когомологии де Рама и степень отображения

5.1. Для гладкого отображения $f : M \to N$ и дифференциальной формы α на N определите естественным образом форму $f^*\alpha$ на M. Докажите, что если два отображения $f_0, f_1 : M \to N$ гладко гомотопны, то есть существует гладкое отображение

$$h : M \times [0,1] \to N, \text{ такое что } f_0(x) \equiv h(x,0), f_1(x) \equiv h(x,1),$$

и $d\alpha = 0$, то найдётся β, такая что $f_0^*\alpha - f_1^*\alpha = d\beta$.

Для этого рассмотрите форму $h^*\alpha$ на цилиндре $M \times [0,1]$ и примените к ней оператор $dH + Hd$, где операция «интегрирования по слоям» H определена на формах, делящихся на dt как

$$H(dt \wedge \beta(x,t)) = \int_0^1 \beta(x,t)\, dt,$$

а на формах, не делящихся на dt, определена как 0.

5.2 (Лемма де Рама). Определим когомологии де Рама

$$H^k(M) = \ker d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)/d\Omega^{k-1}(M).$$

Докажите, что $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$ при $k \neq 0$ и $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.

5.3. Для не обязательно компактного многообразия без края M рассмотрим дифференциальные формы с компактным носителем $\Omega_c^*(M)$ и определим *когомологии де Рама с компактным носителем*

$$H_c^k(M) = \ker d : \Omega_c^k(M) \to \Omega_c^{k+1}(M)/d\Omega_c^{k-1}(M).$$

Докажите, что если $n = \dim M$, M ориентируемо и связно, то $H_c^n(M)$ одномерно.

5.4. Докажите, что для гладкого отображения $f : M \to N$ можно определить отображение $f^* : H_c^k(N) \to H_c^k(M)$ на когомологиях с компактными носителями, если отображение f *собственное*, то есть прообраз компакта всегда компактен. Сформулируйте соответствующий аналог утверждения из задачи 5.1.

5.5. Докажите, что $H_c^k(\mathbb{R}^n) = 0$ при $k \neq n$.

5.6. Докажите, что формы вида $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ замкнуты и линейно независимы в когомологиях тора $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

5.7. Докажите, что любой класс когомологий де Рама $H^k(T^n)$ может быть представлен линейной комбинацией форм вида $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

6. Теорема Сарда и степень отображения

6.1. Рассмотрим собственное гладкое отображение $f : M \to N$ между ориентированными многообразиями одинаковой размерности, где N связно. Точка $y \in N$ называется *регулярным значением* отображения, если для любого $x \in M$, такого что $f(x) = y$, дифференциал Df_x невырожден. Докажите, что при наличии регулярного значения y степень отображения f равна

$$\sum_{x : f(x) = y} \operatorname{sgn} \det Df_x,$$

заметив, что знак детерминанта Df определён независимо от систем координат при условии ориентированности многообразий.

6.2 (Теорема Сарда для многообразий одинаковой размерности). * Докажите, что для всякого гладкого отображения $f : M \to N$ между многообразиями одинаковой размерности множество регулярных значений f плотно в N.

6.3. Пусть отображение $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ гладко и $f(z) \sim az^n$ при $z \to \infty$, при $a \neq 0$ и $n \in \mathbb{Z}^+$. Докажите, что степень f равна n.

6.4 (Теорема Брауэра о неподвижной точке). Всякое непрерывное отображение шара в себя $f : B \to B$ имеет неподвижную точку $f(x) = x$.

6.5. Докажите, что для непрерывного отображения сферы в себя $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ либо найдётся x, такая что $f(x) = -x$, либо f сюръективно.

6.6. Докажите, что если степень непрерывного отображения $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ не равна $(-1)^{n-1}$, то f имеет неподвижную точку $f(x) = x$.

6.7. Классифицируйте непрерывные отображения окружности в себя $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ с точностью до гомотопии.

6.8. Пусть $f : N \to M$ — собственное гладкое отображение ориентированных многообразий с краем одной и той же размерности, причём $f(\partial N) = \partial M$ и M связно. Докажите, что $\deg f = \deg f|_{\partial N}$.

6.9. Рассмотрим симплекс Δ^n, заданный в барицентрических координатах как

$$t_0, t_1, \dots, t_n \geq 0,\ t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1.$$

Пусть его непрерывное отображение в себя $f : \Delta^n \to \Delta^n$ обладает таким свойством: если $t_i = 0$, то при любых остальных координатах соответствующая координата образа, $f_i(t_0, t_1, \dots, t_n) = 0$. Докажите, что тогда f сюръективно.

6.10 (Теорема Сарда для для отображений, увеличивающих размерность). * Докажите, что для всякого гладкого отображения $f : M \to N$ между многообразиями, $\dim N > \dim M$, образ $f(M)$ имеет меру нуль в N.

6.11. * Докажите, что n-мерное гладкое многообразие можно вложить в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

6.12. * Докажите, что n-мерное гладкое многообразие можно погрузить в $\mathbb{R}^{2n}$.

6.13 (Теорема о вложении Уитни). ** Докажите, что n-мерное гладкое многообразие можно вложить в $\mathbb{R}^{2n}$.

7. Внутреннее дифференцирование и производная Ли

7.1. Для векторного поля X на некотором многообразии определим оператор i_X на дифференциальных формах по формуле

$$i_X\alpha(X_2, \dots, X_k) = \alpha(X, X_2, \dots, X_k).$$

Докажите правило Лейбница для него

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha}\alpha \wedge i_X\beta.$$

7.2. Для векторного поля X на некотором многообразии определим оператор на дифференциальных формах как «суперкоммутатор»

$$L_X = i_X d + d\, i_X.$$

Докажите правило Лейбница для него

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta.$$

7.3. Докажите, что для всякого гладкого отображения между многообразиями $\varphi : M \to N$ определено отображение дифференциальных форм $\varphi^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$, действующее по формуле

$$\varphi^*\alpha(X_1, \dots, X_k) = \alpha(\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_k).$$

Выпишите, как это отображение выглядит в явном виде в координатах при $k = \dim M = \dim N$, и может быть в некоторых других случаях.

7.4. Пусть векторное поле X порождает группу диффеоморфизмов многообразия $\varphi_t : M \to M$, то есть

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(p) = X(\varphi_t(p)).$$

Докажите, что операция L_X из предыдущей задачи на самом деле равна производной Ли

$$L_X\alpha = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^*\alpha - \alpha}{t},$$

проверив правило Лейбница и коммутирование с d в обоих определениях.

7.5. Производную Ли можно определить и для других тензоров, в частности для векторных полей. Докажите формулу
$$L_X Y = -L_Y X$$
для двух векторных полей.

7.6. Положим для векторных полей $L_X Y = [X, Y]$. Докажите, что
$$[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$$
и докажите тождество Якоби
$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

7.7. Докажите, что оператор d можно задать через скобку Ли векторных полей по формуле
$$d\alpha(X_0, X_1, \ldots, X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i \alpha(X_0, \ldots, \cancel{X_i}, \ldots, X_k) + \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \ldots, \cancel{X_i}, \ldots, \cancel{X_j}, \ldots, X_k),$$
где в первой сумме векторное поле X_i дифференцирует функцию, получающуюся после подстановки в α остальных векторных полей.

7.8 (Теорема о дивергенции). Пусть на многообразии M фиксирована форма объёма ν. Тогда дивергенцию векторного поля X можно определить как
$$L_X \nu = (\operatorname{div} X)\nu.$$
Как написать интеграл по многообразию с краем
$$\int_M (\operatorname{div} X)\nu$$
через интеграл по краю ∂M?

8. Интегрирование векторных полей

8.1. Докажите, что если векторное поле в точке p не равно нулю, то в некоторой криволинейной системе координат в окрестности точки p оно может быть приведено к виду $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

8.2. Пусть векторные поля $X_1, \ldots, X_k$ линейно независимы в точке p многообразия M. Докажите, что если какая-то скобка $[X_i, X_j]$ в точке p не является линейной комбинацией $X_1, \ldots, X_k$, то не может быть k-мерных подмногообразий $N \subset M$, $N \ni p$, у которых $TN = \langle X_1, \ldots, X_k \rangle$ в окрестности p.

8.3. * Пусть векторные поля $X_1, \ldots, X_k$ линейно независимы в окрестности точки p многообразия M и всякая скобка $[X_i, X_j]$ линейно выражается через $X_1, \ldots, X_k$ с коэффициентами-функциями. Пусть поле X_i из нашего списка порождает однопараметрическое семейство диффеоморфизмов φ^t. Докажите, что $\varphi^t_* \langle X_1, \ldots, X_k \rangle = \langle X_1, \ldots, X_k \rangle$ в окрестности p для достаточно малых t.

8.4 (Теорема Фробениуса). Пусть векторные поля $X_1, \ldots, X_k$ линейно независимы в окрестности точки p многообразия M и всякая скобка $[X_i, X_j]$ линейно выражается через $X_1, \ldots, X_k$ с коэффициентами-функциями. Докажите, что в некоторой окрестности p найдётся подмногообразие $N \subset M$ размерности k, проходящее через p и у которого $TN \subseteq \langle X_1, \ldots, X_k \rangle$.

8.5. Докажите, что для формы 1-й степени α на многообразии M через каждую точку $p \in M$ проходит (локально) подмногообразие $N \subset M$ коразмерности 1 с $\alpha|_N = 0$ тогда и только тогда, когда

$$d\alpha = \beta \wedge \alpha$$

для ещё одной формы β.

9. Немного римановой геометрии

9.1. Докажите, что на всяком гладком многообразии существует риманова структура.

9.2 (Формула риманова объёма). Докажите, что для (полу)римановой метрики g формула

$$\mathrm{vol}_g = \sqrt{|\det g|} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

где $\det g$ подразумевает детерминант матрицы Грама g, корректно определяет одну и ту же плотность меры в любой системе координат. Понятие *плотность меры* означает величину, которая преобразуется почти как дифференциальная форма высшего ранга, но умножаясь на модуль якобиана, а не на сам якобиан.

9.3. Найдите объём единичной сферы $\mathbb{S}^n$ с римановой метрикой, индуцированной с $\mathbb{R}^{n+1}$.

9.4. Проверьте, что невырожденному симметричному скалярному произведению g на касательном пространстве T_pM соответствует невырожденное симметричное скалярное произведение $\tilde{g}$ на кокасательном пространстве T_p^*M, матрица Грама которого в координатном представлении является обратной к матрице Грама g. Покажите, что его можно естественно распространить на все кососимметричные формы на T_pM так, что для ортонормированного базиса $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T_p^*M$ с условием

$$\tilde{g}(\alpha_i, \alpha_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$$

будет выполняться

$$\tilde{g}(\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k}, \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_k}) = \varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k} \delta_{i_1 j_1} \dots \delta_{i_k j_k}$$

при $i_1 < \dots < i_k$ и $j_1 < \dots < j_k$.

9.5 (Звёздочка Ходжа). Докажите, что в присутствии (полу)римановой метрики g на ориентированном многообразии M^n формула

$$\alpha \wedge *\beta = \tilde{g}(\alpha, \beta) \, \mathrm{vol}_g,$$

корректно определяет линейный оператор $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$, где $\tilde{g}$ — соответствующая g билинейная форма на $\Omega^*(M)$.

9.6. На (полу)римановом многообразии (M, g) определим для векторного поля операцию $X \mapsto X^\flat \in \Omega^1(M)$ формулой

$$X^\flat(Y) = g(X, Y),$$

определим также для $\alpha \in \Omega^1(M)$ векторное поле $\alpha^\sharp$ по формуле

$$\alpha(X) = g(\alpha^\sharp, X).$$

Докажите, что операции $\mathrm{grad}, \mathrm{rot}, \mathrm{div}$ для векторных полей на $\mathbb{R}^3$ выражаются через $\sharp, \flat, *$ и внешнее дифференцирование d.

9.7. Докажите, что если у векторного поля X в $\mathbb{R}^3$ нулевая дивергенция, то у него есть векторный потенциал

$$X = \mathrm{rot}\, A.$$

9.8. Выпишите оператор Лапласа для функций в сферических координатах.

10. Связность и кривизна для римановых многообразий

10.1. Пусть (M, g) — многообразие с римановой метрикой g (невырожденной, но необязательно положительно определённой). Докажите, что существует единственная операция *ковариантное дифференцирование векторных полей* $\nabla_X Y$, удовлетворяющая условиям:
 а) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ и $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$ для умножения на функцию;
 б) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$;
 в) $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

10.2 (Формула Кошуля). Докажите, что из приведённых выше свойств следует формула

$$\begin{aligned}&2g(\nabla_X Y, Z) = \\ &\quad = X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X).\end{aligned}$$

Докажите, что из этой формулы, наоборот, следуют свойства ковариантного дифференцирования.

10.3. Получите выражение в координатах для

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i},\ Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x_i},\ Z = \sum_i Z^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

при условии $\nabla_X Y = Z$ как

$$Z^k = \sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} X^i Y^j.$$

Проверьте, что *символы Кристоффеля*

$$\Gamma_{\ell ij} = \sum_k g_{\ell k} \Gamma^k_{ij}$$

можно в координатах найти как

$$\Gamma_{\ell ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\ell i}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}\right).$$

10.4 (Кривизна Римана). Докажите, что выражение

$$R_{X,Y} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

является тензором, то есть при умножении на функцию f векторного поля X, Y, или Z выражение просто умножается на f.

10.5. Докажите, что выражение

$$g(R_{X,Y} Z, T)$$

меняет знак при перестановке X и Y, меняет знак при перестановке Z и T и не меняется при обмене пар X, Y и Z, T.

10.6. Докажите, что кривая, минимизирующая *энергию*

$$E(\gamma) = \int_0^1 g(\dot\gamma, \dot\gamma)\, dt$$

удовлетворяет уравнению

$$\ddot\gamma(t) = \nabla_{\dot\gamma(t)} \dot\gamma(t) = 0.$$

Кривые, удовлетворяющие этому уравнению (но не обязательно минимизирующие энергию) называются *геодезическими*.

10.7. Определим функционал длины

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g(\dot\gamma, \dot\gamma)}\, dt.$$

Докажите, что для кривой, параметризованной отрезком $[0, 1]$, имеет место неравенство

$$E(\gamma) \geq \ell(\gamma)^2$$

с равенством при параметризации с постоянной скоростью.

10.8. Пусть $s : \mathbb{R}^2 \to M$ — параметризованная двумерная поверхность в римановом многообразии с параметрами (u, v), X, Y, Z — векторные поля, определённые по крайней мере на этой поверхности. Положим для векторных полей

$$Y'_u = \nabla_{s'_u} Y, Z'_v = \nabla_{s'_v} Z.$$

Докажите, что

$$X''_{uv} - X''_{vu} = -R_{s'_u, s'_v} X.$$

10.9. Пусть геодезическая γ в (M, g) с единичной скоростью деформируется с помощью векторного поля v, перпендикулярного $\dot\gamma(t)$ в каждой точке $\gamma(t)$. Докажите, что вторая вариация энергии геодезической равна

$$2\int_0^1 \left(g(\dot v, \dot v) - g(R_{v,\dot\gamma} v, \dot\gamma)\right)\, dt + 2g(\dot\gamma, a)|_0^1,$$

где $\dot v = \nabla_{\dot\gamma} v$, a – вторая производная вариации концов геодезической. Для двух единичных и перпендикулярных друг другу векторов v, w выражение $g(R_{v,w} v, w)$ называется *секционной кривизной* плоскости $\langle v, w\rangle$.

10.10. * Докажите, что если кривизна Римана обнуляется во всех точках риманова многообразия, то локально оно изометрично евклидову пространству. Что можно сказать про глобальное строение полного риманова многообразия с нулевой кривизной?

10.11. Докажите, что у единичной сферы $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и её римановой метрики, индуцированной с евклидова пространства, все секционные кривизны равны 1.

10.12. Пусть в $\mathbb{R}^{n+1}$ рассматривается неопределённая метрика $\tilde g = ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$. Докажите, что на гиперповерхности

$$\mathbb{H}^n = \{-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1, x_0 > 0\}$$

индуцируется метрика g, у которой все секционные кривизны равны -1. Найдите группу изометрий $\mathbb{H}^n$.

11. Элементы теории Морса

11.1. Будем говорить, что гладкое отображение $f : X \to Y$ *трансверсально* к подмногообразию $Z \subset Y$, если при всех $z = f(x) \in Z$ выполняется

$$Df_x(T_x X) + T_z Z = T_z Y.$$

Докажите, что прообраз $f^{-1}(Z)$ является подмногообразием X той же коразмерности, что и коразмерность Z в Y.

11.2 (Теорема Тома о трансверсальности). Пусть для некоторых многообразий X, P, Y и подмногообразия $Z \subset Y$ некоторое гладкое отображение

$$F : X \times P \to Y$$

трансверсально к Z. Докажите, что для почти всех значений $p \in P$ отображение

$$F_p : X \to Y, \quad x \mapsto F(x, p)$$

трансверсально к Z.

11.3 (Функции Морса). Докажите, что на всяком компактном многообразии существует гладкая функция, у которой во всех критических точках гессиан невырожден.

11.4 (Лемма Морса). Докажите, что всякую гладкую функцию, у которой дифференциал в нуле равен нулю и матрица вторых производных $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ невырождена, можно криволинейной заменой координат привести к виду

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2$$

в некоторой окрестности нуля, где $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

11.5. Пусть $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ — гладкая собственная функция, X — векторное поле на M, для которого $Xf \equiv -1$ при $f(x) \in [a, b]$ (функция называется *собственной*, если прообраз всякого компакта компактен). Докажите, что многообразия с краем

$$M_b = \{x : x \in M, f(x) \leq b\} \quad M_a = \{x : x \in M, f(x) \leq a\}$$

диффеоморфны.

11.6. * Пусть на замкнутом гладком многообразии M есть гладкая функция с двумя невырожденными (в смысле вторых производных) критическими точками. Докажите, что M гомеоморфно сфере. Что можно сказать про диффеоморфность (см. предыдущую задачу).

11.7. Пусть M — ориентированное многообразие, $\nu \in \Omega^n_c(M)$ — некоторая форма с компактным носителем, а $\varphi \in C^\infty(M)$ — фазовая функция. Докажите, что интеграл с параметром

$$\int_M e^{it\varphi(x)}\nu$$

при $t \to +\infty$ с точностью до быстро убывающих (быстрее любой степени t) слагаемых определяется значениями подинтегрального выражения в произвольно малой окрестности множества критических точек φ, то есть точек, где $d\varphi_x = 0$.

11.8. * В том же интеграле с параметром

$$\int_M e^{it\varphi(x)}\nu$$

получите выражение для вклада невырожденной критической точки φ с точностью до быстро убывающих слагаемых при $t \to +\infty$.

12. Линейная алгебра с симплектическим уклоном

12.1. Пусть $A = (a_{ij})$ – кососимметрическая матрица. Докажите, что её собственные значения мнимые, а детерминант неотрицателен.

12.2. Докажите, что детерминант кососимметричной матрицы является квадратом некоторого многочлена от её элементов с целыми коэффициентами

$$\det A = (\operatorname{Pf} A)^2.$$

12.3. Докажите, что всякая кососимметричная билинейная форма ω на конечномерном векторном пространстве приводится в некоторой системе координат $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k, n_1, \ldots, n_r$ к виду

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} p_i \wedge q_i,$$

если координаты понимать как линейные формы и считать

$$(a \wedge b)(x, y) = a(x)b(y) - a(y)b(x).$$

12.4. Рассмотрим $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ и стандартной симплектической структурой $\omega = \sum_{i=1}^n p_i \wedge q_i$. Для линейного подпространства $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ положим

$$V^{\perp_\omega} = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : \forall y\ \omega(x, y) = 0\}.$$

Докажите, что если $V \subseteq V^{\perp_\omega}$ (*изотропное подпространство*), то $\dim V \leq n$. Случай $\dim V = n$ называется *лагранжевым подпространством.*

12.5. В условиях предыдущей задачи докажите, если $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ одномерно, то оно всегда изотропно.

12.6. Докажите, что если $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ имеет размерность $2n - 1$, то оно коизотропно, то есть $V^{\perp_\omega} \subset V$.

12.7. Какие значения может принимать размерность пересечения $V^{\perp_\omega} \cap V$ для линейных $V \subseteq \mathbb{R}^{2n}$?

12.8. Проверьте, что для изотропного $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ на факторпространстве $V^{\perp_\omega}/V$ форма ω естественно индуцирует симплектическую структуру.

12.9. Докажите, что если линейное преобразование $S : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ сохраняет симплектическую форму $\omega = \sum_{i=1}^n p_i \wedge q_i$, то есть $S \in \mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$, то его детерминант равен 1.

12.10. Докажите, что если $S \in \mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$, то вместе со всяким собственным значением λ преобразование S имеет собственные значения $\bar{\lambda}, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}^{-1}$ той же кратности. Докажите, что кратность собственных значений -1 и 1 у S всегда чётная.

12.11. Пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с симплектической структурой $\omega = \sum_{i=1}^n p_i \wedge q_i$ раскладывается в прямую сумму лагранжевых подпространств

$$\mathbb{R}^{2n} = M \oplus N.$$

С помощью симплектической формы идентифицируем $N = M^*$. Всякое лагранжево подпространство $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ с $L \cap N = 0$ является графиком отображения $S : M \to N$. Докажите, что S, как элемент $M^* \otimes N = M^* \otimes M^*$, является симметричной билинейной формой.

12.12. Пусть $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$ — множество всех лагранжевых подпространств в $\mathbb{R}^{2n}$, предыдущая задача даёт его локальную параметризацию. Докажите, что симплектическая группа $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$ транзитивно действует на $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$.

12.13. * Рассмотрим лагранжево подпространство $N \subset \mathbb{R}^{2n}$. Докажите, что множество $L \in \Lambda(\mathbb{R}^{2n})$ с $\dim L \cap N = 1$ имеет коразмерность 1 в $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$, а множество $L \in \Lambda(\mathbb{R}^{2n})$ с $\dim L \cap N > 1$ имеет коразмерность 3.

12.14. Докажите, что если $S \in \mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$ имеет только вещественные собственные значения, то S имеет инвариантное лагранжево подпространство $L \subset \mathbb{R}^{2n}$. Приведите пример, когда это не так при наличии мнимых собственных значений.

12.15. Докажите, что всякое линейное симплектическое преобразование $S \in \mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$ представляется в виде композиции двух, имеющих квадратичную производящую функцию. Последнее означает, что для некоторой квадратичной функции $S(\bar{q}', \bar{q}'')$ преобразование выводится из соотношений

$$\bar{p}'' = -\frac{\partial S(\bar{q}', \bar{q}'')}{\partial \bar{q}''}, \quad \bar{p}' = \frac{\partial S(\bar{q}', \bar{q}'')}{\partial \bar{q}'}$$

между $(\bar{q}', \bar{p}'), (\bar{q}'', \bar{p}'')$.

12.16. Докажите, что всякую положительно определённую квадратичную форму g на $\mathbb{R}^{2n}$ со стандартной симплектической структурой $\omega = \sum_{i=1}^n p_i \wedge q_i$ можно симплектической заменой координат привести к виду

$$g = \sum_{i=1}^n a_i(p_i^2 + q_i^2).$$

12.17. Докажите, что набор чисел $\{a_i\}$ (с кратностями) из предыдущей задачи является инвариантом квадратичной формы относительно симплектических преобразований.

12.18. Для эллипсоида $E \subset \mathbb{R}^{2n}$ с центром в начале координат можно рассмотреть его квадратичное уравнение $g(x) \le 1$ и среди инвариантов $\{a_i\}$ формы g можно выбрать максимальный a_{max}. Обозначим $c(E) = \frac{\pi}{a_{max}}$, это в некотором смысле «площадь минимального сечения» эллипсоида. Докажите, что если линейное симплектическое преобразование S обладает свойством $S(E') \subseteq E''$ для некоторой пары эллипсоидов в $\mathbb{R}^{2n}$, то $c(E') \le c(E'')$.

12.19. Упорядочив числа $\{a_i\}$ по убыванию, можно ввести семейство инвариантов эллипсоида по формуле

$$c_k(E) = \frac{\pi}{a_k}$$

для $k = 1, \dots, n$. Докажите, что если линейное симплектическое отображение S обладает свойством $S(E') \subseteq E''$ для некоторой пары эллипсоидов в $\mathbb{R}^{2n}$, то $c_k(E') \le c_k(E'')$.

12.20. Комплексная структура J ($J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, $J^2 = -1$) называется *совместимой* с симплектической структурой ω, если

$$g(x, y) = \omega(Jx, y)$$

является положительно определённой квадратичной формой. Докажите, что всякая совместимая комплексная структура симплектической заменой координат может быть сведена к прямой сумме комплексных структур в двумерных плоскостях $\langle p_i, q_i \rangle$, действующих как умножение $q_i + \sqrt{-1}p_i$ на $\sqrt{-1}$.

12.21. Пусть симплектическая структура в $\mathbb{R}^{2n}$ стандартная (см. выше), комплексная структура стандартная (см. выше) и евклидова структура g задана единичной матрицей. Докажите, что (мы отождествляем $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ с помощью J)

$$\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n}) \cap \mathrm{O}(\mathbb{R}^{2n}) = \mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n}) \cap \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n) \cap \mathrm{O}(\mathbb{R}^{2n}) = \mathrm{U}(\mathbb{C}^n),$$

здесь использованы стандартные обозначения для ортогональной, полной линейной и унитарной групп.

12.22. Вспомните, что всякий оператор $S \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ однозначно представляется в виде

$$S = AO,$$

где A — симметричный положительно определённый оператор, а $O \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$; а всякий $S \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ однозначно представляется в виде

$$S = AU,$$

где A — эрмитов положительно определённый оператор, а $U \in \mathrm{U}(\mathbb{C}^n)$. Это означает, что факторпространства $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)/\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)/\mathrm{U}(\mathbb{C}^n)$ стягиваемы.

12.23. Докажите, что пространство $\mathrm{Sp}(\mathbb{R}^{2n})/\mathrm{U}(\mathbb{C}^n)$ равно пространству всех комплексных структур, совместимых с данной симплектической структурой и стягиваемо. Какой есть аналог полярного разложения для этого случая?

13. Выпуклость и преобразование Лежандра

13.1. Определим для выпуклой функции на конечномерном линейном пространстве $L : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *преобразование Лежандра*

$$H : V^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad H(p) = \sup_{v \in V} \left(\langle p, v \rangle - L(v) \right).$$

Докажите, что H тоже выпуклая функция и её преобразование Лежандра равно L.

13.2. В условиях предыдущей задачи, покажите что для дважды непрерывно дифференцируемого L с положительно определённым гессианом $\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}$ отображение $T : v \mapsto p = dL$ взаимно однозначно отображает V на выпуклую область $T(V) \subseteq V^*$.

13.3. Докажите, что преобразование Лежандра квадратичной формы тоже является квадратичной формой. Докажите, что на уровне матриц в некоторой системе координат это соответствует взятию обратной матрицы и делению на 4.

14. Симплектические многообразия и лагранжевы подмногообразия

14.1 (Теорема Дарбу). Докажите, что определённая в окрестности $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ замкнутая невырожденная форма ω степени 2 некоторым диффеоморфизмом меньшей окрестности нуля приводится к стандартному виду

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

14.2. Докажите, что всякое симплектическое многообразие (M^{2n}, ω) ориентируемо.

14.3. Для n-мерного многообразия L определим на кокасательном расслоении T^*L форму λ по формуле

$$\lambda(X)_z = z(\pi_*(X)),$$

где $\pi : T^*L \to L$ — естественная проекция, а $z \in T^*L$ — произвольная точка, X — касательный вектор в z. Докажите, что $\omega = d\lambda$ даёт симплектическую структуру на T^*L.

14.4. Докажите, что если мы рассмотрим форму $\alpha \in \Omega^1(L)$ как сечение $\alpha : L \to T^*L$ для проекции $\pi : T^*L \to L$ (то есть $\pi \circ \alpha = \mathrm{id}_L$), то мы получим

$$\alpha^* \lambda = \alpha.$$

Докажите, что $d\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда ограничение ω на $\alpha(L) \subset T^*L$ равно нулю.

14.5. Докажите, что если $\alpha \in \Omega^1(L)$ замкнута, то преобразование, сдвигающее слой T^*L над $x \in L$ на α_x является симплектоморфизмом.

14.6. Пусть M^{2n} — симплектическое многообразие, а L^n — его лагранжево подмногообразие. Докажите, что у L есть окрестность в M, которая симплектоморфна окрестности L в кокасательном расслоении T^*L, здесь $L \subset T^*L$ рассматривается как нулевое сечение.

14.7. Опишите все лагражевы подмногообразия в T^*L, диффеоморфно проецируемые на L.

14.8. Докажите, что гладкое отображение $f : M \to N$ между симплектическими многообразиями одинаковой размерности является локальным симплектоморфизмом тогда и только тогда, когда его график Γ_f является лагранжевым подмногообразием в $M \times N$ с симплектической формой $\pi_M^* \omega_M - \pi_N^* \omega_N$.

14.9. Из предыдущих двух задач выведите описание симплектоморфизмов $f : M \to M$, C^1-близких тождественному.

14.10. Рассмотрим векторное поле Y на T^*L, для которого $\lambda = i_Y\omega$. Докажите, что касательное к Y (*коническое*) подмногообразие $C \subset T^*L$ лагранжево тогда и только тогда, когда $\lambda|_L = 0$.

14.11. Найдите какое-нибудь лагранжево подмногообразие $L \subset \mathbb{R}^4$, диффеоморфное тору.

14.12. Пусть L — гладкое многообразие и на $L \times \mathbb{R}^N$ задана гладкая функция S (*фазовая функция*) от переменных $(q, \xi) \in L \times \mathbb{R}^N$. Докажите, что если при $d_\xi S = 0$ дифференциалы $d\frac{\partial S}{\partial \xi_1}, \dots, d\frac{\partial S}{\partial \xi_N}$ линейно независимы, то множество

$$L_S = \{(q, d_q S) : q \in L,\ d_\xi S(q, \xi) = 0\}$$

является лагранжевым подмногообразием в T^*L.

14.13. Докажите, что если касательное пространство к $L_S \subset T^*L$ в некоторой точке имеет k-мерное пересечение со слоем расслоения $T^*L \to L$, то в функции S не менее k переменных ξ_i.

14.14. Докажите, что в условиях предыдущей задачи точки с $dS = 0$ соответствуют пересечениям $L_S \cap L$, где $L \subset T^*L$ рассматривается как нулевое сечение. Докажите, что значения S в её критических точках, с точностью до прибавления константы, зависят только от многообразия L_S.

14.15. * Докажите, что если $L' \subset T^*L$ гамильтоново изотопно нулевому сечению $L \subset T^*L$, то оно задаётся в виде L_S из предыдущих задач.

14.16. Можно ли найти лагранжево подмногообразие $L \subset \mathbb{R}^4$, диффеоморфное сфере S^2 или проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$?

15. Гамильтоновы векторные поля и симплектоморфизмы

15.1. Докажите, что векторное поле X сохраняет симплектическую форму ω тогда и только тогда, когда $di_X\omega = 0$. Если найдётся функция H, такая, что $i_X\omega = -dH$, то H называется *гамильтонианом*, а $X = X_H$ называется *гамильтоновым векторным полем*.

15.2. Докажите, что стационарными точками *функционала действия* для кривой $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{2n}$

$$A(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} p_i(\gamma(t))dq_i(\gamma(t)) - H(\gamma(t), t)dt,$$

являются интегральные кривые (возможно зависящего от времени) гамильтонова векторного поля X_H. Сопоставления $\gamma(0) \mapsto \gamma(1)$ для таких кривых называется *гамильтоновым симплектоморфизмом*.

15.3. Для тора $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ постройте симплектоморфизм, не являющийся гамильтоновым. Простой случай, когда гамильтониан не зависит от времени, случай с зависимостью от времени посложнее.

15.4. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ — гамильтонов симплектоморфизм с компактным носителем ($\varphi(x) = x$ за пределами некоторого компактного множества), а x — его неподвижная точка. Докажите, что действие траектории этой точки γ ($\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = x$) не зависит от выбора гамильтониана, а зависит только от итогового симплектоморфизма.

15.5. * Пусть функция $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ имеет единственный минимум $f(0) = 0$, а все не проходящие через нуль траектории гамильтонова векторного поля X_f замкнуты и имеют период π. Докажите, что множество

$$S_f = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : f(x) \le c\}$$

имеет объём $\frac{\pi^n c^n}{n!}$.

15.6. * Пусть функция $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ имеет единственный минимум $f(0) = 0$ и для всякого $c > 0$ гамильтоново векторное поле X_f имеет на поверхности $\{f = c\}$ только замкнутые траектории одного и того же периода. Докажите, что существует гамильтонов симплектоморфизм $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ и гладкая функция $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, такие что

$$f(\varphi(x)) = g(|x|^2)$$

15.7. Для любого положительного ε, придумайте симплектоморфизм, переводящий шар $B^4\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \varepsilon\right) \subset \mathbb{R}^4$ в многогранник

$$P = \{(q_1, q_2, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^4 : |q_1|, |q_2|, |p_1| + |p_2| \le 1\}.$$

15.8. * Пусть в пространствах $\mathbb{R}^n$ с координатами $q_1, \dots, q_n$ и $\mathbb{R}^n$ с координатами $p_1, \dots, p_n$ даны шары B_q и B_p норм ℓ_q и ℓ_p соответственно при $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Докажите, что евклидов шар $B^{2n}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \varepsilon\right)$ можно симплектоморфизмом поместить в тело $B_q \times B_p$.

15.9. ** (Нелинейное обобщение задачи 12.18) Докажите, что если не обязательно линейный симплектоморфизм S обладает свойством $S(E') \subseteq E''$ для некоторой пары эллипсоидов в $\mathbb{R}^{2n}$, то $c(E') \le c(E'')$.

15.10. * Докажите, что утверждение задачи 12.19 про числа c_k эллипсоидов уже неверно для нелинейных отображений.

16. Контактные многообразия

16.1 (Теорема Дарбу для контактных форм). Докажите, что определённая в окрестности $0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$ форма ϑ степени 1, удовлетворяющая условию

$$\vartheta \wedge d\vartheta^n \ne 0$$

некоторым диффеоморфизмом меньшей окрестности нуля приводится к стандартному виду

$$\vartheta = dt + \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i.$$

16.2. *Контактной формой* на $(2n+1)$-мерном многообразии называется форма ϑ степени 1, удовлетворяющая условию

$$\vartheta \wedge d\vartheta^n \ne 0.$$

Докажите, что формула $\sum_{i=1}^n p_i dq_i$ корректно (не зависимо от системы координат на самом деле) определяет контактную форму на пространстве единичных векторов кокасательного расслоения T^*M любого многообразия. «Единичные вектора» можно определять относительно некоторой римановой метрики или даже гладкой нормы на кокасательном расслоении.

16.3. Докажите, что на контактном многообразии существует единственное векторное поле (*поле Риба*), удовлетворяющее условиям

$$\vartheta(R) = 1, i_R d\vartheta = 0.$$

Докажите, что его поток сохраняет контактную форму ϑ. Как меняется поле Риба при умножении ϑ на положительную функцию?

16.4. Докажите, что интеграл контактной формы ϑ по петле γ равен интегралу ϑ по любой другой петле γ', получающейся из γ сдвигом вдоль любого векторного поля из ядра $d\lambda$.

16.5. Докажите, что интегральные кривые поля Риба на контактном многообразии — это стационарные точки функционала

$$A(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \vartheta(\dot\gamma)\, dt.$$

16.6. Докажите, что контактная структура, определяемая формой $\sum_{i=1}^n p_i dq_i$ на пространстве единичных векторов кокасательного расслоения T^*M, не зависит от римановой метрики (или нормы) на слоях кокасательного расслоения. Какой диффеоморфизм переводит одну такую контактную структуру в другую?

16.7. Докажите, что контактная форма ϑ на многообразии M порождает симплектическую форму на $M \times \mathbb{R}$ по формуле

$$\omega = e^t d\vartheta + e^t dt \wedge \vartheta.$$

При этом векторное поле $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ является *лиувиллевым*, то есть $L_Y\omega = \omega$.

16.8. Докажите, что если на симплектическом многообразии (M, ω) есть лиувиллево векторное поле Y, $L_Y\omega = \omega$, то форма $\vartheta = i_Y\omega$ будет контактной на любой гиперповерхности, трансверсальной к Y. Какое векторное поле Y порождает контактную форму из задачи 16.6?

16.9. Запишите условие того, что векторное поле X сохраняет контактную структуру $[\vartheta]$. Докажите, что такое векторное поле однозначно определяется своим *контактным гамильтонианом* $H = \vartheta(X)$.

16.10 (Теорема Грея). *Контактной структурой* на $(2n+1)$-мерном многообразии называется форма ϑ степени 1 с точностью до умножения на ненулевое число (положительное число, если мы говорим об *ориентированной контактной структуре*). Докажите, что всякая гладкая деформация $[\vartheta_t]$ контактной структуры на многообразии M порождена гладким семейством диффеоморфизмов $\varphi_t : M \to M$:

$$\rho(x,t)\vartheta_t = \varphi_t^*\vartheta$$

для некоторой функции $\rho(x,t) > 0$. Рассмотрите диффеоморфизмы, порождённые векторными полями, перпендикулярными ϑ_t.

17. Скобка Пуассона, отображение моментов и редукция

17.1. Положим

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = X_f g = -X_g f,$$

это *скобка Пуассона*. Докажите, что если $h = \{f, g\}$, то для соответствующих гамильтоновых векторных полей

$$X_h = [X_f, X_g]$$

и проверьте тождество Якоби

$$\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}.$$

17.2. Проверьте, что симплектическая форма имеет представление $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ в некоторых координатах тогда и только тогда, когда

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

Такие координаты называются *каноническими*.

17.3. Докажите, что на $2n$-мерном симплектическом многообразии не может быть более n коммутирующих в смысле скобки Пуассона функций с линейно независимыми дифференциалами.

17.4. Пусть в окрестности точки z симлектического многообразия M заданы функции $f_1, \ldots, f_k$, такие что
$$\{f_i, f_j\} = 0$$
и дифференциалы функций линейно независимы в точке z. Докажите, что в некоторой окрестности z этот набор функций можно дополнить до канонической системы координат.

17.5. Пусть в окрестности точки z симлектического многообразия M заданы функции $f_1, \ldots, f_k$ и $g_1, \ldots, g_k$, такие что
$$\{f_i, f_j\} = \{g_i, g_j\} = 0, \quad \{f_i, g_j\} = \delta_{ij}.$$
Докажите, что в некоторой окрестности z этот набор функций можно дополнить до канонической системы координат.

17.6. Даны связная группа Ли G и симплектическое многообразие (M, ω). Предположим, что соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет представление в алгебре Ли векторных полей на M, сохраняющих ω. Докажите, что если M и G односвязны, то это представление поднимается до представления в гладких функциях на M со скобкой Пуассона и соответствует действию группы G на M.

17.7. Докажите, что в ситуации действия группы G на M симплектоморфизмами гамильтонианы составляют *отображение моментов* $m : M \to \mathfrak{g}^*$, причём оно коммутирует с действием G, если действие на $\mathfrak{g}^*$ двойственно к присоединённому.

17.8. Пусть G действует на M гамильтоновыми симплектоморфизмами с отображением моментов $m : M \to \mathfrak{g}^*$. Докажите, что если m трансверсально к нулю, то на фактормногообразии $m^{-1}(0)/G$ (если его можно определить как многообразие) естественно определена симплектическая структура, это называется *симплектическая редукция*.

17.9. Напишите явный вид симплектической формы Фубини–Штуди ω_{FS} на комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$, полученной редукцией с $\mathbb{C}^{n+1}$ для гамильтониана $H = |z|^2 - 1$. Найдите соответствующий объём $\mathbb{C}P^n$.

17.10. Рассмотрите проекцию $h : S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^n$ и напишите явный вид формы $\vartheta \in \Omega^1(S^{2n-1})$, такой что $d\vartheta = h^*\omega_{FS}$.

17.11. Докажите, что отображение $m : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{R}^{n+1}$
$$m(z_0 : z_1 : \cdots : z_n) = \frac{1}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n^2|}(|z_0|^2, |z_1|^2, \ldots, |z_n|^2)$$
переводит проективное пространство в стандартный симплекс
$$\Delta^n = \{(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_0, t_1, \ldots, t_n \geq 0,\ t_0 + t_1 + \cdots + t_n = 1\},$$
переводя при этом меру, соответствующую ω_{FS}^n, в равномерную меру на симплексе. Какова плотность получившейся меры на симплексе?

17.12. Рассмотрим коизотропное линейное подпространство $V \subset \mathbb{R}^{2n}$, проверьте что проекция $V \to V/V^{\perp_\omega}$ является симплектической редукцией. Докажите, что для единичного шара B^{2n} образ $B^{2n} \cap V$ в $V/V^{\perp_\omega}$ симплектоморфен единичному шару B^{2k} соответствующей размерности

18. Неподвижные точки и периодические траектории

18.1 (Теорема Брауэра). Докажите, что всякое непрерывное отображение $f : B \to B$ шара в себя имеет неподвижную точку $f(x) = x$.

18.2. Докажите, то же самое с заменой шара на компактное многообразие (возможно, с краем) с ненулевой эйлеровой характеристикой.

18.3. Докажите, что на границе гладкого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ есть периодическая замкнутая геодезическая.

18.4 (Теорема Пуанкаре–Биркгофа). * Рассмотрим колечко

$$A = \{v \in \mathbb{R}^2 : 1 \le |v| \le 2\}.$$

Пусть непрерывное отображение $f : A \to A$ сохраняет площадь, отображает внутренний шар колечка в себя и внешний край колечка тоже в себя, а также вращает внутренний и внешний край колечка в противоположные стороны. Докажите, что f имеет неподвижную точку, а на самом деле как минимум две. Как понимать фразу «вращает внутренний и внешний край колечка в противоположные стороны»?

18.5. * Докажите, что на границе гладкого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ есть периодическая замкнутая геодезическая.

18.6. Докажите, что всякий нетождественный гамильтонов симплектоморфизм с компактным носителем $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ имеет неподвижную точку с ненулевым действием в смысле задачи 15.4, для случая гамильтониана, не зависящего от времени.

18.7. ** Докажите, что всякий нетождественный гамильтонов симплектоморфизм с компактным носителем $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ имеет неподвижную точку с ненулевым действием в смысле задачи 15.4 в общем случае.

19. Симплектические действия окружностей, торов, отображение моментов

19.1. Докажите, что если компактная группа Ли действует на многообразии M, то на M существует риманова метрика, инвариантная относительно действия G.

19.2. Докажите, что если компактная группа Ли действует на многообразии M и $p \in M$ является неподвижной точкой этого действия, то у p есть координатная окрестность, в которой действие G является линейным (в координатном шаре этой окрестности).

19.3 (Теорема Дарбу с действием группы). Пусть компактная группа Ли действует линейно в шаровой окрестности нуля в $\mathbb{R}^{2n}$, и в той же окрестности определена замкнутая невырожденная форма ω степени 2, инвариантная относительно действия группы. Докажите, что некоторым коммутирующим с действием G диффеоморфизмом меньшей окрестности нуля форма ω приводится к стандартному виду

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

19.4. Предположим, что на симплектическом многообразии (M, ω) задан гамильтониан H, соответствующее которому векторное поле X имеет все траектории периода 1 (то есть возникает действие окружности S^1 на M). Докажите, что у каждой (возможно даже вырожденной) критической точки H есть окрестность с каноническими координатами, в которой H является квадратичной формой.

19.5. В условиях предыдущей задачи докажите, что квадратичная форма гессиана H имеет чётные отрицательный и положительный индексы.

19.6. Пусть тор $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ действует на замкнутом симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) гамильтоновым образом, то есть его действие порождено гамильтонианами

$$H_1, \ldots, H_k : M \to \mathbb{R},$$

задающими вместе отображение моментов $\mu : M \to \mathbb{R}^k$. Докажите, что у всякой точки $z \in M$ есть окрестность U, образ которой при отображении моментов $\mu(U)$ в пересечении с некоторой окрестностью $V \ni \mu(z)$ выглядит как конус с вершиной $\mu(z)$ (или как вся окрестность V).

19.7. * Пусть тор T^k действует на замкнутом связном симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) гамильтоновым образом с отображением моментов $\mu : M^{2n} \to \mathbb{R}^k$. Докажите, что прообраз всякой точки при этом отображении связен. Используйте рассуждения по индукции с использованием теории Морса, при этом полезно расширить утверждение до случая, когда k гамильтонианов задают не действие тора, но действие некоторой связной подгруппы большего тора, которое можно расширить до действия этого большего тора.

19.8. * Пусть тор T^k действует на замкнутом связном симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) гамильтоновым образом с отображением моментов $\mu : M^{2n} \to \mathbb{R}^k$. Докажите, что образ отображения моментов выпуклый.

20. Формула Дюйстермаата–Хекмана

20.1. Предположим, что на (не обязательно компактном) симплектическом многообразии (M, ω) задан гамильтониан H без критических точек, который является собственным отображением (прообраз компакта компактен). Пусть оответствующее H векторное поле X имеет все траектории периода 1, то есть возникает действие окружности S^1 на M, не обязательно свободное, но без неподвижных точек. Докажите, что существует форма $\vartheta \in \Omega^1(M)$ такая, что

$$\vartheta(X) = 1, L_X\vartheta = 0.$$

Чему при этом равно $i_X d\vartheta$?

20.2. В условиях предыдущей задачи определим векторное поле Y на M как

$$i_Y\omega = \vartheta.$$

Докажите, что $L_Y\omega = d\vartheta$ и $L_Y H = -1$ и найдите скобку Ли $[X, Y]$.

20.3. Пусть в условиях предыдущих задач многообразие M_s равно фактору $\widetilde{M_s} = \{x \in M : H(x) = s\}$ по свободному действию S^1 (это симплектическая редукция). Фактор может быть плохо определён, если действие S^1 в некоторых точках несвободно, но в формулах с интегрированием такие точки можно игнорировать. Докажите, что интегрируя векторное поле Y мы получаем диффеоморфизмы $\varphi_{s,t} : \widetilde{M_s} \to \widetilde{M_t}$, которые можно рассматривать как диффеоморфизмы между гладкими частями M_s^* и M_t^*, соответствующими свободному действию S^1.

20.4. Покажите, что на гладкой части M_s^* корректно определена симплектическая форма ω_s, такая что её подъём на $\widetilde{M_s}$ равен ограничению ω на $\widetilde{M_s}$.

20.5. Считая с помощью диффеоморфизмов $\varphi_{s,t}$ гладкую часть M_s^* одним и тем же многообразием, докажите формулу

$$\frac{d\omega_s}{ds} = u|_{M_s^*}$$

для некоторой формы $u \in \Omega^2(M^*/S^1)$, подъём которой на M равен $d\vartheta$.

20.6. Докажите, что класс определённой выше $u_s = u|_{M_s^*}$ в когомологиях $H^2(M_s^*; \mathbb{R})$ не зависит от s. Используйте формулу Картана для

$$\frac{du_s}{ds} = L_Y d\vartheta|_{M_s^*}$$

и не забывайте, что для доказательства независимости класса от s надо выразить эту производную Ли как дифференциал от S^1-инвариантной формы на $\widetilde{M}_s$ с ядром, содержащим X.

20.7. Докажите в условиях предыдущих задач, что класс $[\omega_s] \in H^2(M_s^*; \mathbb{R})$ меняется линейно по s, а значит интеграл

$$\int_{M_s} \omega_s^{n-1}$$

меняется полиномиально по s.

20.8 (Формула Дюйстермаата–Хекмана). Предположим, что на компактном симплектическом многообразии (M, ω) задан гамильтониан H, соответствующее которому векторное поле X имеет все траектории периода 1 (то есть возникает действие окружности S^1 на M) и все критические точки H (неподвижные точки X) изолированы. Докажите, что

$$\int_M e^{-tH} \frac{\omega^n}{n!} = \sum_x \frac{e^{-tH(x)}}{t^n e(x)},$$

где сумма справа идёт по критическим точкам H, а $e(x)$ — целые числа, зависящие от действия S^1 на $T_x M$. Сведите к интегрированию $\vartheta \wedge \omega^{n-1}$ по поверхностям уровня $\{H(x) = s\}$.

20.9 (Торическое многообразие). Пусть тор T^n действует на замкнутом симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) гамильтоновым образом с отображением моментов $\mu : M^{2n} \to \mathbb{R}^n$. Докажите, что образ $\mu(M)$ является выпуклым многогранником и мера с плотностью $\frac{\omega^n}{n!}$ на M переходит в равномерную меру на многограннике.

20.10. * Какие есть ограничения на комбинаторный тип многогранников, получаемых в предыдущей задаче?

20.11. Докажите, что преобразование Фурье характеристической функции выпуклого многогранника с вершинами $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^n$ выражается как

$$\int_P e^{ikx}\, dx = \sum_{m=1}^N r_m(k) e^{ikv_m},$$

где $r_m(k)$ — рациональная функция от k. Напишите выражение для $r_m(k)$ для *простых вершин*, то есть для вершин, в которых сходятся ровно n рёбер.

20.12. Пусть гамильтониан $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ является положительно определённой квадратичной формой и соответствующее векторное поле X не имеет замкнутых траекторий периода меньше 1 (кроме начала координат). Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-H} \frac{\omega^n}{n!} \geq 1.$$

20.13 (Нерешённая задача). ** Пусть строго выпуклый гамильтониан $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ имеет минимум в нуле $H(0) = 0$ и соответствующее векторное поле X не имеет замкнутых траекторий периода меньше 1 (кроме начала координат). Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-H} \frac{\omega^n}{n!} \geq 1.$$

21. Комплексные и почти комплексные структуры

21.1. Докажите, что на всяком симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) существует совместимая почти комплексная структура J, то есть найдётся риманова метрика g, такая что $g(X, Y) = \omega(JX, Y)$. Докажите, что любые две таких почти комплексных структуры гомотопны, то есть одну можно непрерывно деформировать в другую. Вспомните задачу 12.23.

21.2. Докажите, что у всякого симплектического многообразия (M^{2n}, ω) можно корректно определить классы Чженя касательного расслоения (если вы знаете про характеристические классы).

21.3. Докажите, что если на замкнутом подмножестве X симплектического подмногообразия (M, ω) задана совместимая с ω комплексная структура J, продолжающаяся на окрестность X, то её можно продолжить на всё M совместимым с ω образом.

21.4. * Пусть на симплектическом многообразии (M, ω) действует симплектоморфизмами компактная группа Ли G. Докажите, что на M существует почти комплексная структура J, совместимая с ω и инвариантная относительно действия G.

21.5. Напишите явный вид симплектической формы Фубини–Штуди ω_{FS} на комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$ и римановой метрики g_{FS}, которая соответствует этой форме и стандартной комплексной структуре на $\mathbb{C}P^n$. Напишите явную формулу для расстояния между двумя точками в этой метрике, опишите геодезические в этой метрике и найдите диаметр $\mathbb{C}P^n$.

21.6. * Найдите риманову кривизну для метрики Фубини–Штуди на проективном пространстве.

21.7. Рассмотрим единичный шар $B^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$. Докажите, что для линейных подпространств $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ размерности $2k$ площадь сечения $V \cap B^{2n}$ не меньше интеграла от $\omega^k/k!$ по $V \cap B^{2n}$.

21.8. Пусть на симплектическом многообразии (M, ω) дана совместимая почти комплексная структура J и риманова структура $g(x, y) = \omega(Jx, y)$. Риманова структура определяет риманов объём $\mathrm{vol}_{2k} N$ для $2k$-мерных вложенный многообразий $N \subset M$ (вспомните формулу), пусть N будет компактно и возможно с краем. Докажите, что имеет место неравенство

$$\mathrm{vol}_k N \geq \int_N \omega^k/k!,$$

равенство в котором достигается только тогда, когда касательное пространство TN инвариантно относительно J во всех точках N и правильно ориентировано относительно этой комплексной структуры.

21.9. Докажите, что если $N \subset M$ таково, что TN в каждой точке инвариантно относительно почти комплексной структуры J, то N имеет локально минимальный объём относительно непрерывных деформаций с компактным носителем, оставляющих на месте край ∂N.

21.10 (Лемма Шварца). Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — единичный открытый диск. Докажите, что аналитическое отображение $f : D \to D$ имеет в нуле производную по модулю не большую единицы.

21.11. Опишите все аналитические диффеоморфизмы $D \to D$.

21.12. Докажите, что множество аналитических отображений $f : D \to D$ компактно в открыто-замкнутой топологии. Докажите, что его подмножество, состоящее из инъективных отображений, тоже компактно.

21.13 (Теорема Римана об отображении). * Докажите, что всякая односвязная область $U \subset \mathbb{C}$, не совпадающая со всем $\mathbb{C}$, аналитически диффеоморфна диску D.

21.14. Пусть $S \in \mathbb{C}^n$ — голоморфная кривая, собственно вложенная в $\mathbb{C}^n$ и содержащая начало координат. Докажите, что её пересечение со сферой $S_r^{2n}(0)$ имеет длину не менее $2\pi r$, а пересечение с шаром $B_r^{2n}(0)$ имеет площадь не менее πr^2.

21.15 (Тензор Ниенхуйса). Для почти комплексной структуры J на M выпишем выражение от двух векторных полей X, Y

$$N(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY].$$

Проверьте, что в координатном представлении оно не зависит от производных X, Y, то есть является тензором. Проверьте, что на $\mathbb{C}^n$ с его стандартной комплектной структурой $N(X, Y) \equiv 0$.

21.16. ** Докажите, что если $N(X, Y) \equiv 0$ на M, то локально M диффеоморфно $\mathbb{C}^n$ с его комплексной структурой. Рассмотрите случай, когда компоненты J являются не просто гладкими, а вещественно-аналитическими функциями.

21.17. * Докажите, что всякая комплексная структура на $\mathbb{R}^2$ локально диффеоморфна стандартной комплексной структуре на $\mathbb{C}$.

21.18. * Какие бывают комплексные структуры на $\mathbb{R}^2$ с точностью до глобального диффеоморфизма?