

1. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ, РАЗБИЕНИЕ ЕДИНИЦЫ И ОТОБРАЖЕНИЯ

- 1.1. Придумайте две разные гладкие структуры на топологическом пространстве \mathbb{R}^1 .
- 1.2. Опишите все компактные одномерные гладкие многообразия (возможно с краем) с точностью до диффеоморфизма. Рассмотрите карты, отображающие области многообразия на интервалы прямой, посмотрите как две карты могут пересекаться.
- 1.3. * Опишите все не обязательно компактные одномерные гладкие многообразия (возможно с краем) с точностью до диффеоморфизма.
- 1.4. * Докажите, что между любыми двумя гладкими структурами на топологическом пространстве \mathbb{R}^2 существует диффеоморфизм.
- 1.5. Объясните, как разрезать сферу S^3 на два многообразия с краем, диффеоморфные полным торам.
- 1.6. Докажите, что тор $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ можно вложить в \mathbb{R}^{n+1} .
- 1.7. Докажите, что если отображение $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ гладких многообразий инъективно, $\text{rk } Df \equiv \dim M$ всюду и M компактно, то его образ $f(M)$ является вложенным в \mathbb{R}^n многообразием.
- 1.8. Докажите, что для любых двух разных точек гладкого многообразия M существует гладкая функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, которая принимает разные значения в этих точках.
- 1.9. Проверьте, что в вашем решении предыдущей задачи используется свойство отделимости (две разные точки имеют непересекающиеся окрестности). Приведите пример топологического пространства, удовлетворяющего всем свойствам многообразия, кроме отделимости, для которого предыдущая задача не имеет решения.
- 1.10. Докажите, что для любого покрытия $\{U_\alpha\}_\alpha$ многообразия M найдётся набор неотрицательных гладких функций $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ таких, что

$$\forall \alpha \text{ supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha$$

и

$$\forall x \in M \sum_{\alpha} \rho_\alpha(x) = 1$$

(сумма конечна при каждом x). Это называется *разбиение единицы*.

- 1.11. Докажите, что гладкие отображения между многообразиями $M \rightarrow N$ находятся в однозначном соответствии с *гомоморфизмами алгебр* $C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$, то есть отображениями колец функций, сохраняющих сложение, умножение, и переводящих константу в ту же константу.
- 1.12. С какими алгебраическими объектами находятся в однозначном соответствии точки многообразия M ?

2. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ — ОПРЕДЕЛЕНИЕ

- 2.1. Докажите, что всякую гладкую функцию в окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$$

с гладкими g_i .

2.2. Определим *касательный вектор* в точке $p \in \mathbb{R}^n$ как \mathbb{R} -линейное отображение $X : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

Докажите, что размерность пространства касательных векторов в точке $T_p\mathbb{R}^n$ равна n . Докажите, что касательное пространство в точке не изменится, если заменить \mathbb{R}^n на произвольную окрестность $U \ni p$.

2.3. Докажите, что для открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$, \mathbb{R} -линейное отображение $X : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$, удовлетворяющее соотношению

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

задаётся *векторным полем* на U , то есть семейством гладко зависящих от точки касательных векторов в точке. Докажите, что в локальной системе координат на U векторное поле можно задать как

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + X_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

где коэффициенты X_i являются гладкими функциями.

2.4. Докажите, что для всякого гладкого отображения между многообразиями $\varphi : M \rightarrow N$ определено отображение касательных векторов, переводящее вектор X на M в вектор φ_*X на N по формуле

$$\varphi_*(X)f = X(f \circ \varphi).$$

Выпишите, как это отображение выглядит в явном виде в координатах.

2.5. Заметьте, что всякая гладкая функция $f \in C^\infty(M)$ может быть рассмотрена как отображение $M \rightarrow \mathbb{R}$ и тогда f_* из предыдущего определения даёт дифференциал $d_p f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ в любой точке $p \in M$, и такие дифференциалы порождают всякое кокасательное пространство $T_p^* M$ в точке $p \in M$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ — ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

3.1. Определим *дифференциальную форму степени k* на многообразии M как отображение наборов из k гладких векторных полей X_1, \dots, X_k на M в бесконечно гладкие функции на M , $(X_1, \dots, X_k) \rightarrow \alpha(X_1, \dots, X_k)$, линейное по каждому аргументу и относительно умножения на бесконечно гладкие функции, то есть

$$\alpha(f_1 X_1, \dots, f_k X_k) = f_1 \dots f_k \alpha(X_1, \dots, X_k),$$

и кососимметричное, то есть меняющее знак при перестановке любых двух своих аргументов. Докажите, что задать дифференциальную форму степени k — это то же самое, что задать в каждой точке $p \in M$ полилинейное кососимметричное отображение

$$\alpha_p : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_k \rightarrow \mathbb{R},$$

гладко зависящее от точки p . Множество таких форм обозначим $\Omega^k(M)$.

3.2. Докажите, что для всякой $f \in C^\infty(M)$ её дифференциал можно считать формой первой степени в соответствии с формулой

$$df(X) = X(f).$$

3.3. Для всякой $f \in C^\infty(M)$ попробуйте определить *гессиан* (второй дифференциал) в точке p как квадратичную форму на $T_p M$, не зависящую от системы координат. Убедитесь, что это возможно только при $df = 0$ в точке p .

3.4. Какой коэффициент $c_{k,\ell}$ надо подобрать в определении внешнего умножения кососимметричных полилинейных форм

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{k+\ell}) = c_{k,\ell} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} (\operatorname{sgn} \sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)})$$

чтобы выполнялась ассоциативность умножения и условие нормировки

$$(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = 1?$$

3.5. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — область. Докажите, что на гладких дифференциальных формах на U существует единственный \mathbb{R} -линейный оператор d , повышающий степень формы на 1 и удовлетворяющий условиям: а) для функций df является дифференциалом; б) $d^2 = 0$; в) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ — ИНТЕГРИРОВАНИЕ

4.1. Для гладкой формы с компактным носителем $\nu = a(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ на пространстве \mathbb{R}^n (иначе говоря $\nu \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$) определим (например, через кратный интеграл Римана)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nu := \int_{\mathbb{R}^n} a(x) dx_1 \dots dx_n.$$

Докажите, что если $\nu = d\lambda$ и $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nu = 0.$$

4.2. Пусть $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ — функция с компактным носителем и единичным интегралом. Докажите, что для всякой $\nu \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ найдётся число I и форма $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, такие что

$$\nu = I\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n + d\lambda.$$

4.3. Докажите, что факторпространство $\Omega_c^n(\mathbb{R}^n)/d\Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ одномерно, то есть всевозможные способы определить интеграл формы $\nu \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы интеграл от $d\lambda$ равнялся нулю, могут отличаться только умножением на константу.

4.4. Докажите, что для всякого гладкого отображения между многообразиями $\varphi : M \rightarrow N$ определено отображение дифференциальных форм $\varphi^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$, действующее по формуле

$$\varphi^* \alpha(X_1, \dots, X_k) = \alpha(\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_k).$$

Выпишите, как это отображение выглядит в явном виде в координатах при $k = \dim M = \dim N$, и может быть в некоторых других случаях. Докажите, что оно коммутирует с оператором d .

4.5 (Замена переменных в кратном интеграле). Рассмотрим гладкое отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ с компактным носителем, то есть $\varphi(x) = x$ за пределами некоторого компактного множества. Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^* \nu = \int_{\mathbb{R}^n} \nu.$$

Какая формула получится, если мы представим ν в виде $a(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ и выпишем $\varphi^* \nu$ через якобиан φ ?

4.6. Докажите, что гладкое отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ с компактным носителем сюръективно.

4.7. Докажите, что для любого покрытия $\{U_\alpha\}_\alpha$ многообразия M найдётся набор неотрицательных гладких функций $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ таких, что

$$\forall \alpha \text{ supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha$$

и

$$\forall x \in M \sum_{\alpha} \rho_\alpha(x) = 1$$

(сумма конечна при каждом x). Это называется *разбиение единицы*. Рассмотрите случай компактного M , когда это утверждение намного проще.

4.8. Докажите, что n -мерное многообразие M ориентируемо тогда и только тогда, когда существует дифференциальная форма $\nu \in \Omega^n(M)$, которая ни в одной точке не равна нулю.

4.9. Для n -мерного многообразия с краем M назовём ориентации M и края ∂M согласованными, если в локальной системе координат x_1, \dots, x_n в окрестности некоторой точки края M задано неравенством $x_n \geq 0$, а ∂M — соответственно равенством $x_n = 0$, ориентация M положительна относительно $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, а ориентация ∂M положительна относительно $(-1)^n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$. Докажите, что это согласование не зависит от выбора системы координат.

4.10 (Формула Стокса). Докажите для ориентированного многообразия с краем $(M, \partial M)$ размерности n и формы с компактным носителем на нём α степени $n - 1$

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

4.11. Докажите, что площадь области, ограниченной замкнутой гладкой кривой без самопересечений $C \subset \mathbb{R}^2$, можно посчитать по формуле:

$$A = \pm \int_C x dy,$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации кривой.

4.12. Докажите, что объём области в \mathbb{R}^3 , ограниченной гладкой связной вложенной поверхностью без края $S \subset \mathbb{R}^3$, можно посчитать по формуле:

$$V = \pm \int_S x dy \wedge dz,$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации поверхности.

5. КОГОМОЛОГИИ ДЕ РАМА И СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ

5.1. Для гладкого отображения $f : M \rightarrow N$ и дифференциальной формы α на N определите естественным образом форму $f^*\alpha$ на M . Докажите, что если два отображения $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ гладко гомотопны, то есть существует гладкое отображение

$$h : M \times [0, 1] \rightarrow N, \text{ такое что } f_0(x) \equiv h(x, 0), f_1(x) \equiv h(x, 1),$$

и $d\alpha = 0$, то найдётся β , такая что $f_0^*\alpha - f_1^*\alpha = d\beta$.

Для этого рассмотрите форму $h^*\alpha$ на цилиндре $M \times [0, 1]$ и примените к ней оператор $dH + Hd$, где операция «интегрирования по слоям» H определена на формах, делящихся на dt как

$$H(dt \wedge \beta(x, t)) = \int_0^1 \beta(x, t) dt,$$

а на формах, не делящихся на dt , определена как 0.

5.2 (Лемма де Рама). Определим когомологии де Рама

$$H^k(M) = \ker d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)/d\Omega^{k-1}(M).$$

Докажите, что $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$ при $k \neq 0$ и $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.

5.3. Для не обязательно компактного многообразия без края M рассмотрим дифференциальные формы с компактным носителем $\Omega_c^*(M)$ и определим *когомологии де Рама с компактным носителем*

$$H_c^k(M) = \ker d : \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(M)/d\Omega_c^{k-1}(M).$$

Докажите, что если $n = \dim M$, M ориентируемо и связно, то $H_c^n(M)$ одномерно.

5.4. Докажите, что для гладкого отображения $f : M \rightarrow N$ можно определить отображение $f^* : H_c^k(N) \rightarrow H_c^k(M)$ на когомологиях с компактными носителями, если отображение f *собственное*, то есть прообраз компакта всегда компактен. Сформулируйте соответствующий аналог утверждения из задачи 5.1.

5.5. Докажите, что $H_c^k(\mathbb{R}^n) = 0$ при $k \neq n$.

5.6. Докажите, что формы вида $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ замкнуты и линейно независимы в когомологиях тора $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

5.7. Докажите, что любой класс когомологий де Рама $H^k(T^n)$ может быть представлен линейной комбинацией форм вида $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$.

6. ТЕОРЕМА САРДА И СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ

6.1. Рассмотрим собственное гладкое отображение $f : M \rightarrow N$ между ориентированными многообразиями одинаковой размерности, где N связно. Точка $y \in N$ называется *регулярным значением* отображения, если для любого $x \in M$, такого что $f(x) = y$, дифференциал Df_x невырожден. Докажите, что при наличии регулярного значения y степень отображения f равна

$$\sum_{x:f(x)=y} \operatorname{sgn} \det Df_x,$$

заметив, что знак детерминанта Df определён независимо от систем координат при условии ориентированности многообразий.

6.2 (Теорема Сарда для многообразий одинаковой размерности). * Докажите, что для всякого гладкого отображения $f : M \rightarrow N$ между многообразиями одинаковой размерности множество регулярных значений f плотно в N .

6.3. Пусть отображение $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ гладко и $f(z) \sim az^n$ при $z \rightarrow \infty$, при $a \neq 0$ и $n \in \mathbb{Z}^+$. Докажите, что степень f равна n .

6.4 (Теорема Брауэра о неподвижной точке). Всякое непрерывное отображение шара в себя $f : B \rightarrow B$ имеет неподвижную точку $f(x) = x$.

6.5. Докажите, что для непрерывного отображения сферы в себя $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ либо найдётся x , такая что $f(x) = -x$, либо f сюръективно.

6.6. Докажите, что если степень непрерывного отображения $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ не равна $(-1)^{n-1}$, то f имеет неподвижную точку $f(x) = x$.

6.7. Классифицируйте непрерывные отображения окружности в себя $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ с точностью до гомотопии.

6.8. Пусть $f : N \rightarrow M$ — собственное гладкое отображение ориентированных многообразий с краем одной и той же размерности, причём $f(\partial N) = \partial M$ и M связно. Докажите, что $\deg f = \deg f|_{\partial N}$.

6.9. Рассмотрим симплекс Δ^n , заданный в барицентрических координатах как

$$t_0, t_1, \dots, t_n \geq 0, \quad t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1.$$

Пусть его непрерывное отображение в себя $f : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ обладает таким свойством: если $t_i = 0$, то при любых остальных координатах соответствующая координата образа, $f_i(t_0, t_1, \dots, t_n) = 0$. Докажите, что тогда f сюръективно.

6.10 (Теорема Сарда для для отображений, увеличивающих размерность). * Докажите, что для всякого гладкого отображения $f : M \rightarrow N$ между многообразиями, $\dim N > \dim M$, образ $f(M)$ имеет меру нуль в N .

6.11. * Докажите, что n -мерное гладкое многообразие можно вложить в \mathbb{R}^{2n+1} .

6.12. * Докажите, что n -мерное гладкое многообразие можно погрузить в \mathbb{R}^{2n} .

6.13 (Теорема о вложении Уитни). ** Докажите, что n -мерное гладкое многообразие можно вложить в \mathbb{R}^{2n} .

7. ВНУТРЕННЕЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ПРОИЗВОДНАЯ ЛИ

7.1. Для векторного поля X на некотором многообразии определим оператор i_X на дифференциальных формах по формуле

$$i_X \alpha(X_2, \dots, X_k) = \alpha(X, X_2, \dots, X_k).$$

Докажите правило Лейбница для него

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X \alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge i_X \beta.$$

7.2. Для векторного поля X на некотором многообразии определим оператор на дифференциальных формах как «суперкоммутатор»

$$L_X = i_X d + d i_X.$$

Докажите правило Лейбница для него

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X \beta.$$

7.3. Докажите, что для всякого гладкого отображения между многообразиями $\varphi : M \rightarrow N$ определено отображение дифференциальных форм $\varphi^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$, действующее по формуле

$$\varphi^* \alpha(X_1, \dots, X_k) = \alpha(\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_k).$$

Выпишите, как это отображение выглядит в явном виде в координатах при $k = \dim M = \dim N$, и может быть в некоторых других случаях.

7.4. Пусть векторное поле X порождает группу диффеоморфизмов многообразия $\varphi_t : M \rightarrow M$, то есть

$$\frac{d}{dt} \varphi_t(p) = X(\varphi_t(p)).$$

Докажите, что операция L_X из предыдущей задачи на самом деле равна производной Ли

$$L_X \alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* \alpha - \alpha}{t},$$

проверив правило Лейбница и коммутирование с d в обоих определениях.

7.5. Производную Ли можно определить и для других тензоров, в частности для векторных полей. Докажите формулу

$$L_X Y = -L_Y X$$

для двух векторных полей.

7.6. Положим для векторных полей $L_X Y = [X, Y]$. Докажите, что

$$[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

и докажите тождество Якоби

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

7.7. Докажите, что оператор d можно задать через скобку Ли векторных полей по формуле

$$d\alpha(X_0, X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i \alpha(X_0, \dots, \cancel{X_i}, \dots, X_k) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \cancel{X_i}, \dots, \cancel{X_j}, \dots, X_k),$$

где в первой сумме векторное поле X_i дифференцирует функцию, получающуюся после подстановки в α остальных векторных полей.

7.8 (Теорема о дивергенции). Пусть на многообразии M фиксирована форма объёма ν . Тогда дивергенцию векторного поля X можно определить как

$$L_X \nu = (\operatorname{div} X) \nu.$$

Как написать интеграл по многообразию с краем

$$\int_M (\operatorname{div} X) \nu$$

через интеграл по краю ∂M ?

8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

8.1. Докажите, что если векторное поле в точке p не равно нулю, то в некоторой криволинейной системе координат в окрестности точки p оно может быть приведено к виду $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

8.2. Пусть векторные поля X_1, \dots, X_k линейно независимы в точке p многообразия M . Докажите, что если какая-то скобка $[X_i, X_j]$ в точке p не является линейной комбинацией X_1, \dots, X_k , то не может быть k -мерных подмногообразий $N \subset M$, $N \ni p$, у которых $TN = \langle X_1, \dots, X_k \rangle$ в окрестности p .

8.3. * Пусть векторные поля X_1, \dots, X_k линейно независимы в окрестности точки p многообразия M и всякая скобка $[X_i, X_j]$ линейно выражается через X_1, \dots, X_k с коэффициентами-функциями. Пусть поле X_i из нашего списка порождает однопараметрическое семейство диффеоморфизмов φ^t . Докажите, что $\varphi_*^t \langle X_1, \dots, X_k \rangle = \langle X_1, \dots, X_k \rangle$ в окрестности p для достаточно малых t .

8.4 (Теорема Фробениуса). Пусть векторные поля X_1, \dots, X_k линейно независимы в окрестности точки p многообразия M и всякая скобка $[X_i, X_j]$ линейно выражается через X_1, \dots, X_k с коэффициентами-функциями. Докажите, что в некоторой окрестности p найдётся подмногообразие $N \subset M$ размерности k , проходящее через p и у которого $TN \subseteq \langle X_1, \dots, X_k \rangle$.

8.5. Докажите, что для формы 1-й степени α на многообразии M через каждую точку $p \in M$ проходит (локально) подмногообразие $N \subset M$ коразмерности 1 с $\alpha|_N = 0$ тогда и только тогда, когда

$$d\alpha = \beta \wedge \alpha$$

для ещё одной формы β .

9. НЕМНОГО РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

9.1. Докажите, что на всяком гладком многообразии существует риманова структура.

9.2 (Формула риманова объёма). Докажите, что для (полу)римановой метрики g формула

$$\text{vol}_g = \sqrt{|\det g|} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

где $\det g$ подразумевает детерминант матрицы Грама g , корректно определяет одну и ту же плотность меры в любой системе координат. Понятие *плотность меры* означает величину, которая преобразуется почти как дифференциальная форма высшего ранга, но умножаясь на модуль якобиана, а не на сам якобиан.

9.3. Найдите объём единичной сферы \mathbb{S}^n с римановой метрикой, индуцированной с \mathbb{R}^{n+1} .

9.4. Проверьте, что невырожденному симметричному скалярному произведению g на касательном пространстве $T_p M$ соответствует невырожденное симметричное скалярное произведение \tilde{g} на кокасательном пространстве $T_p^* M$, матрица Грама которого в координатном представлении является обратной к матрице Грама g . Покажите, что его можно естественно распространить на все кососимметричные формы на $T_p M$ так, что для ортонормированного базиса $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in T_p^* M$ с условием

$$\tilde{g}(\alpha_i, \alpha_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$$

будет выполняться

$$\tilde{g}(\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k}, \alpha_{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_k}) = \varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_k} \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_k j_k}$$

при $i_1 < \cdots < i_k$ и $j_1 < \cdots < j_k$.

9.5 (Звёздочка Ходжа). Докажите, что в присутствии (полу)римановой метрики g на ориентированном многообразии M^n формула

$$\alpha \wedge * \beta = \tilde{g}(\alpha, \beta) \text{vol}_g,$$

корректно определяет линейный оператор $*$: $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$, где \tilde{g} — соответствующая g билинейная форма на $\Omega^*(M)$.

9.6. На (полу)римановом многообразии (M, g) определим для векторного поля операцию $X \mapsto X^\flat \in \Omega^1(M)$ формулой

$$X^\flat(Y) = g(X, Y),$$

определим также для $\alpha \in \Omega^1(M)$ векторное поле α^\sharp по формуле

$$\alpha(X) = g(\alpha^\sharp, X).$$

Докажите, что операции grad , rot , div для векторных полей на \mathbb{R}^3 выражаются через \sharp , \flat , $*$ и внешнее дифференцирование d .

9.7. Докажите, что если у векторного поля X в \mathbb{R}^3 нулевая дивергенция, то у него есть векторный потенциал

$$X = \text{rot } A.$$

9.8. Выпишите оператор Лапласа для функций в сферических координатах.

10. СВЯЗНОСТЬ И КРИВИЗНА ДЛЯ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

10.1. Пусть (M, g) — многообразие с римановой метрикой g (невырожденной, но необязательно положительно определенной). Докажите, что существует единственная операция *ковариантное дифференцирование векторных полей* $\nabla_X Y$, удовлетворяющая условиям:

- а) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ и $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$ для умножения на функцию;
- б) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$;
- в) $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

10.2 (Формула Кошуля). Докажите, что из приведённых выше свойств следует формула

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X).$$

Докажите, что из этой формулы, наоборот, следуют свойства ковариантного дифференцирования.

10.3. Получите выражение в координатах для

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Z = \sum_i Z^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

при условии $\nabla_X Y = Z$ как

$$Z^k = \sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k X^i Y^j.$$

Проверьте, что *символы Кристоффеля*

$$\Gamma_{lij} = \sum_k g_{lk} \Gamma_{ij}^k$$

можно в координатах найти как

$$\Gamma_{lij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right).$$

10.4 (Кривизна Римана). Докажите, что выражение

$$R_{X,Y} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

является тензором, то есть при умножении на функцию f векторного поля X , Y , или Z выражение просто умножается на f .

10.5. Докажите, что выражение

$$g(R_{X,Y} Z, T)$$

меняет знак при перестановке X и Y , меняет знак при перестановке Z и T и не меняется при обмене пар X, Y и Z, T .

10.6. Докажите, что кривая, минимизирующая *энергию*

$$E(\gamma) = \int_0^1 g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt$$

удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\gamma}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0.$$

Кривые, удовлетворяющие этому уравнению (но не обязательно минимизирующие энергию) называются *геодезическими*.

10.7. Определим функционал длины

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt.$$

Докажите, что для кривой, параметризованной отрезком $[0, 1]$, имеет место неравенство

$$E(\gamma) \geq \ell(\gamma)^2$$

с равенством при параметризации с постоянной скоростью.

10.8. Пусть $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ — параметризованная двумерная поверхность в римановом многообразии с параметрами (u, v) , X, Y, Z — векторные поля, определённые по крайней мере на этой поверхности. Положим для векторных полей

$$Y'_u = \nabla_{s'_u} Y, Z'_v = \nabla_{s'_v} Z.$$

Докажите, что

$$X''_{uv} - X''_{vu} = -R_{s'_u, s'_v} X.$$

10.9. Пусть геодезическая γ в (M, g) с единичной скоростью деформируется с помощью векторного поля v , перпендикулярного $\dot{\gamma}(t)$ в каждой точке $\gamma(t)$. Докажите, что вторая вариация энергии геодезической равна

$$2 \int_0^1 (g(\dot{v}, \dot{v}) - g(R_{v, \dot{\gamma}} v, \dot{\gamma})) dt + 2g(\dot{\gamma}, a)|_0^1,$$

где $\dot{v} = \nabla_{\dot{\gamma}} v$, a — вторая производная вариации концов геодезической. Для двух единичных и перпендикулярных друг другу векторов v, w выражение $g(R_{v, w} v, w)$ называется *секционной кривизной* плоскости $\langle v, w \rangle$.

10.10. * Докажите, что если кривизна Римана обнуляется во всех точках риманова многообразия, то локально оно изометрично евклидову пространству. Что можно сказать про глобальное строение полного риманова многообразия с нулевой кривизной?

10.11. Докажите, что у единичной сферы $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и её римановой метрики, индуцированной с евклидова пространства, все секционные кривизны равны 1.

10.12. Пусть в \mathbb{R}^{n+1} рассматривается неопределённая метрика $\tilde{g} = ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$. Докажите, что на гиперповерхности

$$\mathbb{H}^n = \{-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1, x_0 > 0\}$$

индуцируется метрика g , у которой все секционные кривизны равны -1 . Найдите группу изометрий \mathbb{H}^n .

11. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МОРСА

11.1. Будем говорить, что гладкое отображение $f : X \rightarrow Y$ *трансверсально* к подмногообразию $Z \subset Y$, если при всех $z = f(x) \in Z$ выполняется

$$Df_x(T_x X) + T_z Z = T_z Y.$$

Докажите, что прообраз $f^{-1}(Z)$ является подмногообразием X той же коразмерности, что и коразмерность Z в Y .

11.2 (Теорема Тома о трансверсальности). Пусть для некоторых многообразий X, P, Y и подмногообразия $Z \subset Y$ некоторое гладкое отображение

$$F : X \times P \rightarrow Y$$

трансверсально к Z . Докажите, что для почти всех значений $p \in P$ отображение

$$F_p : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto F(x, p)$$

трансверсально к Z .

11.3 (Функции Морса). Докажите, что на всяком компактном многообразии существует гладкая функция, у которой во всех критических точках гессиан невырожден.

11.4 (Лемма Морса). Докажите, что всякую гладкую функцию, у которой дифференциал в нуле равен нулю и матрица вторых производных $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ невырождена, можно криволинейной заменой координат привести к виду

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2$$

в некоторой окрестности нуля, где $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

11.5. Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая собственная функция, X — векторное поле на M , для которого $Xf \equiv -1$ при $f(x) \in [a, b]$ (функция называется *собственной*, если прообраз всякого компакта компактен). Докажите, что многообразия с краем

$$M_b = \{x : x \in M, f(x) \leq b\} \quad M_a = \{x : x \in M, f(x) \leq a\}$$

диффеоморфны.

11.6. * Пусть на замкнутом гладком многообразии M есть гладкая функция с двумя невырожденными (в смысле вторых производных) критическими точками. Докажите, что M гомеоморфно сфере. Что можно сказать про диффеоморфность (см. предыдущую задачу).

11.7. * Пусть однородный многочлен с комплексными коэффициентами P степени d задаёт гладкое подмногообразие $V \subset \mathbb{C}P^n$ и регулярен в каждой точке V . Докажите, что класс диффеоморфности гладкого многообразия V зависит только от n и d и не зависит от многочлена P .

11.8. Пусть M — ориентированное многообразие, $\nu \in \Omega_c^n(M)$ — некоторая форма с компактным носителем, а $\varphi \in C^\infty(M)$ — фазовая функция. Докажите, что интеграл с параметром

$$\int_M e^{it\varphi(x)} \nu$$

при $t \rightarrow +\infty$ с точностью до быстро убывающих (быстрее любой степени t) слагаемых определяется значениями подинтегрального выражения в произвольно малой окрестности множества критических точек φ , то есть точек, где $d\varphi_x = 0$.

11.9. * В том же интеграле с параметром

$$\int_M e^{it\varphi(x)} \nu$$

получите выражение для вклада невырожденной критической точки φ с точностью до быстро убывающих слагаемых при $t \rightarrow +\infty$.

12. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С СИМПЛЕКТИЧЕСКИМ УКЛОНОМ

12.1. Пусть $A = (a_{ij})$ — кососимметрическая матрица. Докажите, что её собственные значения мнимые, а детерминант неотрицателен.

12.2. Докажите, что детерминант кососимметричной матрицы является квадратом некоторого многочлена от её элементов с целыми коэффициентами

$$\det A = (\text{Pf } A)^2.$$

12.3. Докажите, что всякая кососимметричная билинейная форма ω на конечномерном векторном пространстве приводится в некоторой системе координат $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k, n_1, \dots, n_r$ к виду

$$\omega = \sum_{i=1}^k p_i \wedge q_i,$$

если координаты понимать как линейные формы и считать

$$(a \wedge b)(x, y) = a(x)b(y) - a(y)b(x).$$

12.4. Рассмотрим \mathbb{R}^{2n} с координатами $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ и стандартной симплектической структурой $\omega = \sum_{i=1}^n p_i \wedge q_i$. Для линейного подпространства $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ положим

$$V^{\perp\omega} = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : \forall y \omega(x, y) = 0\}.$$

Докажите, что если $V \subseteq V^{\perp\omega}$ (изотропное подпространство), то $\dim V \leq n$. Случай $\dim V = n$ называется лагранжевым подпространством.

12.5. В условиях предыдущей задачи докажите, если $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ одномерно, то оно всегда изотропно.

12.6. Докажите, что если $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ имеет размерность $2n - 1$, то оно коизотропно, то есть $V^{\perp\omega} \subset V$.

12.7. Какие значения может принимать размерность пересечения $V^{\perp\omega} \cap V$ для линейных $V \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ при данном $k = \dim V$?

12.8. Проверьте, что для изотропного $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ на факторпространстве $V^{\perp\omega}/V$ форма ω естественно индуцирует симплектическую структуру.

12.9. Докажите, что если линейное преобразование $S : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ сохраняет симплектическую форму $\omega = \sum_{i=1}^n p_i \wedge q_i$, то есть $S \in \text{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$, то его детерминант равен 1.

12.10. Докажите, что если $S \in \text{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$, то вместе со всяким собственным значением λ преобразование S имеет собственные значения $\bar{\lambda}, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}^{-1}$ той же кратности. Докажите, что кратность собственных значений -1 и 1 у S всегда чётная.

12.11. Пространство \mathbb{R}^{2n} с симплектической структурой $\omega = \sum_{i=1}^n p_i \wedge q_i$ раскладывается в прямую сумму лагранжевых подпространств

$$\mathbb{R}^{2n} = M \oplus N.$$

С помощью симплектической формы идентифицируем $N = M^*$. Всякое лагранжево подпространство $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ с $L \cap N = 0$ является графиком отображения $S : M \rightarrow N$. Докажите, что S , как элемент $M^* \otimes N = M^* \otimes M^*$, является симметричной билинейной формой.

12.12. Пусть $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$ — множество всех лагранжевых подпространств в \mathbb{R}^{2n} , предыдущая задача даёт его локальную параметризацию. Докажите, что симплектическая группа $\text{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$ транзитивно действует на $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$.

12.13. * Рассмотрим лагранжево подпространство $N \subset \mathbb{R}^{2n}$. Докажите, что множество $L \in \Lambda(\mathbb{R}^{2n})$ с $\dim L \cap N = 1$ имеет коразмерность 1 в $\Lambda(\mathbb{R}^{2n})$, а множество $L \in \Lambda(\mathbb{R}^{2n})$ с $\dim L \cap N > 1$ имеет коразмерность 3.

12.14. Докажите, что если $S \in \text{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$ имеет только вещественные собственные значения, то S имеет инвариантное лагранжево подпространство $L \subset \mathbb{R}^{2n}$. Приведите пример, когда это не так при наличии мнимых собственных значений.

12.15. Докажите, что всякое линейное симплектическое преобразование $S \in \text{Sp}(\mathbb{R}^{2n})$ представляется в виде композиции двух, имеющих квадратичную производящую функцию. Последнее означает, что для некоторой квадратичной функции $S(\bar{q}', \bar{q}'')$ преобразование выводится из соотношений

$$\bar{p}'' = -\frac{\partial S(\bar{q}', \bar{q}'')}{\partial \bar{q}''}, \quad \bar{p}' = \frac{\partial S(\bar{q}', \bar{q}'')}{\partial \bar{q}'}$$

между (\bar{q}', \bar{p}') , (\bar{q}'', \bar{p}'') .

12.16. Докажите, что всякую положительно определённую квадратичную форму g на \mathbb{R}^{2n} со стандартной симплектической структурой $\omega = \sum_{i=1}^n p_i \wedge q_i$ можно симплектической заменой координат привести к виду

$$g = \sum_{i=1}^n a_i(p_i^2 + q_i^2).$$

12.17. Докажите, что набор чисел $\{a_i\}$ (с кратностями) из предыдущей задачи является инвариантом квадратичной формы относительно симплектических преобразований.

12.18. Для эллипсоида $E \subset \mathbb{R}^{2n}$ с центром в начале координат можно рассмотреть его квадратичное уравнение $g(x) \leq 1$ и среди инвариантов $\{a_i\}$ формы g можно выбрать максимальный a_{max} . Обозначим $c(E) = \frac{\pi}{a_{max}}$, это в некотором смысле «площадь минимального сечения» эллипсоида. Докажите, что если линейное симплектическое преобразование S обладает свойством $S(E') \subseteq E''$ для некоторой пары эллипсоидов в \mathbb{R}^{2n} , то $c(E') \leq c(E'')$.

12.19. Упорядочив числа $\{a_i\}$ по убыванию, можно ввести семейство инвариантов эллипсоида по формуле

$$c_k(E) = \frac{\pi}{a_k}$$

для $k = 1, \dots, n$. Докажите, что если линейное симплектическое отображение S обладает свойством $S(E') \subseteq E''$ для некоторой пары эллипсоидов в \mathbb{R}^{2n} , то $c_k(E') \leq c_k(E'')$.

12.20. Комплексная структура J ($J : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $J^2 = -1$) называется *совместимой* с симплектической структурой ω , если

$$g(x, y) = \omega(Jx, y)$$

является положительно определённой квадратичной формой. Докажите, что всякая совместимая комплексная структура симплектической заменой координат может быть сведена к прямой сумме комплексных структур в двумерных плоскостях $\langle p_i, q_i \rangle$, действующих как умножение $q_i + \sqrt{-1}p_i$ на $\sqrt{-1}$.

12.21. Пусть симплектическая структура в \mathbb{R}^{2n} стандартная (см. выше), комплексная структура стандартная (см. выше) и евклидова структура g задана единичной матрицей. Докажите, что (мы отождествляем $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ с помощью J)

$$\text{Sp}(\mathbb{R}^{2n}) \cap \text{O}(\mathbb{R}^{2n}) = \text{Sp}(\mathbb{R}^{2n}) \cap \text{GL}(\mathbb{C}^n) = \text{GL}(\mathbb{C}^n) \cap \text{O}(\mathbb{R}^{2n}) = \text{U}(\mathbb{C}^n),$$

здесь использованы стандартные обозначения для ортогональной, полной линейной и унитарной групп.

12.22. Вспомните, что всякий оператор $S \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ однозначно представляется в виде

$$S = AO,$$

где A — симметричный положительно определённый оператор, а $O \in \text{O}(\mathbb{R}^n)$; а всякий $S \in \text{GL}(\mathbb{C}^n)$ однозначно представляется в виде

$$S = AU,$$

где A — эрмитов положительно определённый оператор, а $U \in U(\mathbb{C}^n)$. Докажите, что факторпространства $GL(\mathbb{R}^n)/O(\mathbb{R}^n)$ и $GL(\mathbb{C}^n)/U(\mathbb{C}^n)$ стягиваемы.

12.23. Докажите, что пространство $Sp(\mathbb{R}^{2n})/U(\mathbb{C}^n)$ равно пространству всех комплексных структур, совместимых с данной симплектической структурой и стягиваемо. Какой есть аналог полярного разложения для этого случая?

13. ВЫПУКЛОСТЬ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА

13.1. Определим для выпуклой функции на конечномерном линейном пространстве $L : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ преобразование Лежандра

$$H : V^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad H(p) = \sup_{v \in V} (\langle p, v \rangle - L(v)).$$

Докажите, что H тоже выпуклая функция и её преобразование Лежандра равно L .

13.2. В условиях предыдущей задачи, покажите что для дважды непрерывно дифференцируемого L с положительно определённым гессианом $\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}$ отображение $T : v \mapsto p = dL$ взаимно однозначно отображает V на выпуклую область $T(V) \subseteq V^*$.

13.3. Докажите, что преобразование Лежандра квадратичной формы тоже является квадратичной формой. Докажите, что на уровне матриц в некоторой системе координат это соответствует взятию обратной матрицы и делению на 4.

14. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ЛАГРАНЖЕВЫ ПОДМНОГООБРАЗИЯ

14.1 (Формула для трюка Мозера). Пусть зависящее от времени векторное поле X_t на многообразии M интегрируется до семейства диффеоморфизмов $\varphi_t : M \rightarrow M$. Пусть дано гладко зависящее от времени семейство дифференциальных форм (или более общих тензоров) ξ_t . Докажите формулу

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* \xi_t = \varphi_t^* (\dot{\xi}_t + L_{X_t} \xi_t),$$

где точка означает производную по времени t .

14.2 (Теорема Дарбу). Докажите, что определённая в окрестности $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ замкнутая невырожденная форма ω степени 2 некоторым диффеоморфизмом меньшей окрестности нуля приводится к стандартному виду

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

14.3. Докажите, что всякое симплектическое многообразие (M^{2n}, ω) ориентируемо.

14.4. Для n -мерного многообразия L определим на кокасательном расслоении T^*L форму λ по формуле

$$\lambda(X)_z = z(\pi_*(X)),$$

где $\pi : T^*L \rightarrow L$ — естественная проекция, а $z \in T^*L$ — произвольная точка, X — касательный вектор в z . Докажите, что $\omega = d\lambda$ даёт симплектическую структуру на T^*L .

14.5. Докажите, что если мы рассмотрим форму $\alpha \in \Omega^1(L)$ как сечение $\alpha : L \rightarrow T^*L$ для проекции $\pi : T^*L \rightarrow L$ (то есть $\pi \circ \alpha = \text{id}_L$), то мы получим

$$\alpha^* \lambda = \alpha.$$

Докажите, что $d\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда ограничение ω на $\alpha(L) \subset T^*L$ равно нулю.

14.6. Докажите, что если $\alpha \in \Omega^1(L)$ замкнута, то преобразование, сдвигающее слой T^*L над $x \in L$ на α_x является симплектоморфизмом.

14.7. Пусть M^{2n} — симплектическое многообразие, а L^n — его лагранжево подмногообразие. Докажите, что у L есть окрестность в M , которая симплектоморфна окрестности L в кокасательном расслоении T^*L , здесь $L \subset T^*L$ рассматривается как нулевое сечение.

14.8. Опишите все лагранжевы подмногообразия в T^*L , диффеоморфно проецируемые на L .

14.9. Докажите, что гладкое отображение $f : M \rightarrow N$ между симплектическими многообразиями одинаковой размерности является локальным симплектоморфизмом тогда и только тогда, когда его график Γ_f является лагранжевым подмногообразием в $M \times N$ с симплектической формой $\pi_M^* \omega_M - \pi_N^* \omega_N$.

14.10. Из предыдущих двух задач выведите описание симплектоморфизмов $f : M \rightarrow M$, C^1 -близких тождественному.

14.11. Рассмотрим векторное поле Y на T^*L , для которого $\lambda = i_Y \omega$. Докажите, что касательное к Y (коническое) подмногообразие $C \subset T^*L$ лагранжево тогда и только тогда, когда $\lambda|_C = 0$.

14.12. Найдите какое-нибудь лагранжево подмногообразие $L \subset \mathbb{R}^4$, диффеоморфное тору.

14.13. Пусть L — гладкое многообразие и на $L \times \mathbb{R}^N$ задана гладкая функция S (фазовая функция) от переменных $(q, \xi) \in L \times \mathbb{R}^N$. Докажите, что если при $d_\xi S = 0$ дифференциалы $d \frac{\partial S}{\partial \xi_1}, \dots, d \frac{\partial S}{\partial \xi_N}$ линейно независимы, то множество

$$L_S = \{(q, d_q S) : q \in L, d_\xi S(q, \xi) = 0\}$$

является лагранжевым подмногообразием в T^*L .

14.14. Докажите, что если касательное пространство к $L_S \subset T^*L$ в некоторой точке имеет k -мерное пересечение со слоем расслоения $T^*L \rightarrow L$, то в функции S не менее k переменных ξ_i .

14.15. Докажите, что в условиях предыдущей задачи точки с $dS = 0$ соответствуют пересечениям $L_S \cap L$, где $L \subset T^*L$ рассматривается как нулевое сечение. Докажите, что значения S в её критических точках, с точностью до прибавления константы, зависят только от многообразия L_S .

14.16. * Докажите, что если $L' \subset T^*L$ гамильтоново изотопно нулевому сечению $L \subset T^*L$, то оно задаётся в виде L_S из предыдущих задач.

14.17. Можно ли найти лагранжево подмногообразие $L \subset \mathbb{R}^4$, диффеоморфное сфере S^2 или проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$?

15. ГАМИЛЬТОНОВЫ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И СИМПЛЕКТОМОРФИЗМЫ

15.1. Докажите, что векторное поле X сохраняет симплектическую форму ω тогда и только тогда, когда $di_X \omega = 0$. Если найдётся функция H , такая, что $i_X \omega = -dH$, то H называется гамильтонианом, а $X = X_H$ называется гамильтоновым векторным полем.

15.2. Докажите, что стационарными точками функционала действия для кривой $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$

$$A(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n p_i(\gamma(t)) dq_i(\gamma(t)) - H(\gamma(t), t) dt,$$

являются интегральные кривые (возможно зависящего от времени) гамильтонова векторного поля X_H . Сопоставления $\gamma(0) \mapsto \gamma(1)$ для таких кривых называется *гамильтоновым симплектоморфизмом*.

15.3. Для тора $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ постройте симплектоморфизм, не являющийся гамильтоновым. Простой случай, когда гамильтониан не зависит от времени, случай с зависимостью от времени посложнее.

15.4. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — гамильтонов симплектоморфизм с компактным носителем ($\varphi(x) = x$ за пределами некоторого компактного множества), а x_0 — его неподвижная точка. Докажите, что действие траектории этой точки $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ (такой что $\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = x_0$) не зависит от выбора гамильтониана, а зависит только от итогового симплектоморфизма.

15.5. * Пусть функция $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет единственный минимум $f(0) = 0$, а все не проходящие через нуль траектории гамильтонова векторного поля X_f замкнуты и имеют период π . Докажите, что множество

$$S_f = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : f(x) \leq c\}$$

имеет объём $\frac{\pi^n c^n}{n!}$.

15.6. * Пусть функция $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет единственный минимум $f(0) = 0$ и для всякого $c > 0$ гамильтоново векторное поле X_f имеет на поверхности $\{f = c\}$ только замкнутые траектории одного и того же периода. Докажите, что существует гамильтонов симплектоморфизм $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ и гладкая функция $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, такие что

$$f(\varphi(x)) = g(|x|^2)$$

15.7. Для любого положительного ε , придумайте симплектоморфизм, переводящий шар $B^4\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \varepsilon\right) \subset \mathbb{R}^4$ в многогранник

$$P = \{(q_1, q_2, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^4 : |q_1|, |q_2|, |p_1| + |p_2| \leq 1\}.$$

15.8. * Пусть в пространствах \mathbb{R}^n с координатами q_1, \dots, q_n и \mathbb{R}^n с координатами p_1, \dots, p_n даны шары B_q и B_p норм ℓ_q и ℓ_p соответственно при $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Докажите, что евклидов шар $B^{2n}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \varepsilon\right)$ можно симплектоморфизмом поместить в тело $B_q \times B_p$.

15.9. ** (Нелинейное обобщение задачи 12.18) Докажите, что если не обязательно линейный симплектоморфизм S обладает свойством $S(E') \subseteq E''$ для некоторой пары эллипсоидов в \mathbb{R}^{2n} , то $c(E') \leq c(E'')$.

15.10. * Докажите, что утверждение задачи 12.19 про числа c_k эллипсоидов уже неверно для нелинейных отображений.

16. КОНТАКТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

16.1. *Контактной формой* на $(2n + 1)$ -мерном многообразии называется форма ϑ степени 1, удовлетворяющая условию

$$\vartheta \wedge d\vartheta^n \neq 0.$$

Докажите, что формула $\sum_{i=1}^n p_i dq_i$ корректно (не зависимо от системы координат на самом деле) определяет контактную форму на пространстве единичных векторов кокасательного расслоения T^*M любого многообразия. «Единичные вектора» можно определять относительно некоторой римановой метрики или даже гладкой нормы на кокасательном расслоении.

16.2. Докажите, что на контактном многообразии существует единственное векторное поле (*поле Реба*), удовлетворяющее условиям

$$\vartheta(R) = 1, i_R d\vartheta = 0.$$

Докажите, что его поток сохраняет контактную форму ϑ . Как меняется поле Реба при умножении ϑ на положительную функцию?

16.3. Докажите, что интеграл контактной формы ϑ по петле γ равен интегралу ϑ по любой другой петле γ' , получающейся из γ сдвигом вдоль любого векторного поля из ядра $d\lambda$.

16.4. Докажите, что интегральные кривые поля Реба на контактном многообразии — это стационарные точки функционала

$$A(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \vartheta(\dot{\gamma}) dt.$$

16.5. Докажите, что контактная структура, определяемая формой $\sum_{i=1}^n p_i dq_i$ на пространстве единичных векторов кокасательного расслоения T^*M , не зависит от римановой метрики (или нормы) на слоях кокасательного расслоения. Какой диффеоморфизм переводит одну такую контактную структуру в другую?

16.6. Докажите, что контактная форма ϑ на многообразии M порождает симплектическую форму на $M \times \mathbb{R}$ по формуле

$$\omega = e^t d\vartheta + e^t dt \wedge \vartheta.$$

При этом векторное поле $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ является *лиувиллевым*, то есть $L_Y \omega = \omega$.

16.7. Докажите, что если на симплектическом многообразии (M, ω) есть лиувиллево векторное поле Y , $L_Y \omega = \omega$, то форма $\vartheta = i_Y \omega$ будет контактной на любой гиперповерхности, трансверсальной к Y . Какое векторное поле Y порождает контактную форму из задачи 16.5?

16.8. Докажите, что на любом многообразии M с контактной формой λ можно найти риманову структуру g , такую что

$$g(X, X) \geq \lambda(X)^2$$

и равенство выполняется только на векторах X , пропорциональных вектору Реба R . Проверьте, что любая траектория векторного поля Реба является геодезической для такой римановой структуры g .

16.9. Запишите условие того, что векторное поле X сохраняет контактную структуру $[\vartheta]$. Докажите, что такое векторное поле однозначно определяется своим *контактным гамильтонианом* $H = \vartheta(X)$.

16.10 (Теорема Грея). *Контактной структурой* на $(2n + 1)$ -мерном многообразии называется форма ϑ степени 1 с точностью до умножения на ненулевое число (положительное число, если мы говорим об *ориентированной контактной структуре*). Докажите, что всякая гладкая деформация ϑ_t контактной структуры на многообразии M порождена гладким семейством диффеоморфизмов $\varphi_t : M \rightarrow M$:

$$\rho(x, t)\vartheta_0 = \varphi_t^* \vartheta_t$$

для некоторой функции $\rho(x, t) > 0$. Рассмотрите диффеоморфизмы, порождённые векторными полями, перпендикулярными ϑ_t .

16.11 (Теорема Дарбу для контактных форм). Докажите, что определённая в окрестности $0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$ контактная форма ϑ степени 1, некоторым диффеоморфизмом меньшей окрестности нуля приводится к стандартному виду в координатах $z, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$

$$\vartheta_0 = dz + \sum_{i=1}^n p_i dq_i.$$

Линейным преобразованием добейтесь равенств $\vartheta = \vartheta_0$ и $d\vartheta = d\vartheta_0$ в начале координат, потом соедините ϑ и ϑ_0 семейством контактных форм ϑ_t . Рассмотрите диффеоморфизмы, порождённые векторными полями, не обязательно перпендикулярными ϑ_t .

17. Скобка Пуассона, отображение моментов и редукция

17.1. Положим

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = X_f g = -X_g f,$$

это *скобка Пуассона*. Докажите, что если $h = \{f, g\}$, то для соответствующих гамильтоновых векторных полей

$$X_h = [X_f, X_g]$$

и проверьте тождество Якоби

$$\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}.$$

17.2. Проверьте, что симплектическая форма имеет представление $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ в некоторых координатах тогда и только тогда, когда

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}.$$

Такие координаты называются *каноническими*.

17.3. Докажите, что на $2n$ -мерном симплектическом многообразии не может быть более n коммутирующих в смысле скобки Пуассона функций с линейно независимыми дифференциалами.

17.4. Пусть в окрестности точки z симплектического многообразия M заданы функции f_1, \dots, f_k , такие что

$$\{f_i, f_j\} = 0$$

и дифференциалы функций линейно независимы в точке z . Докажите, что в некоторой окрестности z этот набор функций можно дополнить до канонической системы координат.

17.5. Пусть в окрестности точки z симплектического многообразия M заданы функции f_1, \dots, f_k и g_1, \dots, g_k , такие что

$$\{f_i, f_j\} = \{g_i, g_j\} = 0, \quad \{f_i, g_j\} = \delta_{ij}.$$

Докажите, что в некоторой окрестности z этот набор функций можно дополнить до канонической системы координат.

17.6. Даны связная группа Ли G и симплектическое многообразие (M, ω) . Предположим, что соответствующая алгебра Ли \mathfrak{g} имеет представление в алгебре Ли векторных полей на M , сохраняющих ω . Докажите, что если M и G односвязны, то это представление поднимается до представления в гладких функциях на M со скобкой Пуассона и соответствует действию группы G на M .

17.7. Докажите, что в ситуации действия группы G на M симплектоморфизмами гамильтонианы составляют *отображение моментов* $m : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$, причём оно коммутирует с действием G , если действие на \mathfrak{g}^* двойственно к присоединённому.

17.8. Пусть G действует на M гамильтоновыми симплектоморфизмами с отображением моментов $m : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Докажите, что если m трансверсально к нулю, то на фактормногообразии $m^{-1}(0)/G$ (если его можно определить как многообразие) естественно определена симплектическая структура, это называется *симплектическая редукция*.

17.9. Напишите явный вид симплектической формы Фубини–Штуди ω_{FS} на комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$, полученной редукцией с \mathbb{C}^{n+1} для гамильтониана $H = |z|^2 - 1$. Найдите соответствующий объём $\mathbb{C}P^n$.

17.10. Рассмотрите проекцию $h : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ и напишите явный вид формы $\vartheta \in \Omega^1(S^{2n-1})$, такой что $d\vartheta = h^*\omega_{FS}$.

17.11. Докажите, что отображение $m : \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$$m(z_0 : z_1 : \dots : z_n) = \frac{1}{|z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} (|z_0|^2, |z_1|^2, \dots, |z_n|^2)$$

переводит проективное пространство в стандартный симплекс

$$\Delta^n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_0, t_1, \dots, t_n \geq 0, t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1\},$$

переводя при этом меру, соответствующую ω_{FS}^n , в равномерную меру на симплексе. Какова плотность получившейся меры на симплексе?

17.12. Рассмотрим коизотропное линейное подпространство $V \subset \mathbb{R}^{2n}$, проверьте что проекция $V \rightarrow V/V^{\perp\omega}$ является симплектической редукцией. Докажите, что для единичного шара B^{2n} образ $B^{2n} \cap V$ в $V/V^{\perp\omega}$ симплектоморфен единичному шару B^{2k} соответствующей размерности

18. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ

18.1 (Теорема Брауэра). Докажите, что всякое непрерывное отображение $f : B \rightarrow B$ шара в себя имеет неподвижную точку $f(x) = x$.

18.2. Докажите, то же самое с заменой шара на компактное многообразие (возможно, с краем) с ненулевой эйлеровой характеристикой.

18.3. Докажите, что на границе гладкого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ есть замкнутая геодезическая.

18.4 (Теорема Пуанкаре–Биркгофа). * Рассмотрим колечко

$$A = \{v \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq |v| \leq 2\}.$$

Пусть непрерывное отображение $f : A \rightarrow A$ сохраняет площадь, отображает внутренний шар колечка в себя и внешний край колечка тоже в себя, а также вращает внутренний и внешний край колечка в противоположные стороны. Докажите, что f имеет неподвижную точку, а на самом деле как минимум две. Как понимать фразу «вращает внутренний и внешний край колечка в противоположные стороны»?

18.5. * Докажите, что на границе гладкого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ есть периодическая замкнутая геодезическая.

18.6. Докажите, что всякий нетождественный гамильтонов симплектоморфизм с компактным носителем $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ имеет неподвижную точку с ненулевым действием в смысле задачи 15.4, для случая гамильтониана, не зависящего от времени.

18.7. ** Докажите, что всякий нетождественный гамильтонов симплектоморфизм с компактным носителем $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ имеет неподвижную точку с ненулевым действием в смысле задачи 15.4 в общем случае.

19. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ ОКРУЖНОСТЕЙ, ТОРОВ, ОТОБРАЖЕНИЕ МОМЕНТОВ

19.1. Докажите, что если компактная группа Ли действует на многообразии M , то на M существует риманова метрика, инвариантная относительно действия G .

19.2. Докажите, что если компактная группа Ли действует на многообразии M и $p \in M$ является неподвижной точкой этого действия, то у p есть координатная окрестность, в которой действие G является линейным (в координатном шаре этой окрестности).

19.3 (Теорема Дарбу с действием группы). Пусть компактная группа Ли действует линейно в шаровой окрестности нуля в \mathbb{R}^{2n} , и в той же окрестности определена замкнутая невырожденная форма ω степени 2, инвариантная относительно действия группы. Докажите, что некоторым коммутирующим с действием G диффеоморфизмом меньшей окрестности нуля форма ω приводится к стандартному виду

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

19.4. Предположим, что на симплектическом многообразии (M, ω) задан гамильтониан H , соответствующее которому векторное поле X имеет все траектории периода 1 (то есть возникает действие окружности S^1 на M). Докажите, что у каждой (возможно даже вырожденной) критической точки H есть окрестность с каноническими координатами, в которой H является квадратичной формой.

19.5. В условиях предыдущей задачи докажите, что квадратичная форма гессиана H имеет чётные отрицательный и положительный индексы.

19.6. Пусть тор $T^k = \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k$ действует на замкнутом симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) гамильтоновым образом, то есть его действие порождено гамильтонианами

$$H_1, \dots, H_k : M \rightarrow \mathbb{R},$$

задающими вместе отображение моментов $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^k$. Докажите, что у всякой точки $z \in M$ есть окрестность U , образ которой при отображении моментов $\mu(U)$ в пересечении с некоторой окрестностью $V \ni \mu(z)$ выглядит как конус с вершиной $\mu(z)$ (или как вся окрестность V).

19.7. * Пусть тор T^k действует на замкнутом связном симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) гамильтоновым образом с отображением моментов $\mu : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^k$. Докажите, что прообраз всякой точки при этом отображении связан. Используйте рассуждения по индукции с использованием теории Морса, при этом полезно расширить утверждение до случая, когда k гамильтонианов задают не действие тора, но действие некоторой связной подгруппы большего тора, которое можно расширить до действия этого большего тора.

19.8. * Пусть тор T^k действует на замкнутом связном симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) гамильтоновым образом с отображением моментов $\mu : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^k$. Докажите, что образ отображения моментов выпуклый.

20. ФОРМУЛА ДАЮСТЕРМААТА–ХЕКМАНА

20.1. Предположим, что на (не обязательно компактном) симплектическом многообразии (M, ω) задан гамильтониан H без критических точек, который является собственным отображением (прообраз компакта компактен). Пусть соответствующее H векторное поле X имеет все траектории периода 1, то есть возникает действие окружности S^1 на M ,

не обязательно свободное, но без неподвижных точек. Докажите, что существует форма $\vartheta \in \Omega^1(M)$ такая, что

$$\vartheta(X) = 1, L_X\vartheta = 0.$$

Чему при этом равно $i_X d\vartheta$?

20.2. В условиях предыдущей задачи определим векторное поле Y на M как

$$i_Y\omega = \vartheta.$$

Докажите, что $L_Y\omega = d\vartheta$ и $L_YH = -1$ и найдите скобку Ли $[X, Y]$.

20.3. Пусть в условиях предыдущих задач многообразие M_s равно фактору $\widetilde{M}_s = \{x \in M : H(x) = s\}$ по свободному действию S^1 (это симплектическая редукция). Фактор может быть плохо определён, если действие S^1 в некоторых точках несвободно, но в формулах с интегрированием такие точки можно игнорировать. Докажите, что интегрируя векторное поле Y мы получаем диффеоморфизмы $\varphi_{s,t} : \widetilde{M}_s \rightarrow \widetilde{M}_t$, которые можно рассматривать как диффеоморфизмы между гладкими частями M_s^* и M_t^* , соответствующими свободному действию S^1 .

20.4. Покажите, что на гладкой части M_s^* корректно определена симплектическая форма ω_s , такая что её подъём на \widetilde{M}_s равен ограничению ω на \widetilde{M}_s .

20.5. Считая с помощью диффеоморфизмов $\varphi_{s,t}$ гладкую часть M_s^* одним и тем же многообразием, докажите формулу

$$\frac{d\omega_s}{ds} = u|_{M_s^*}$$

для некоторой формы $u \in \Omega^2(M^*/S^1)$, подъём которой на M равен $d\vartheta$.

20.6. Докажите, что класс определённой выше $u_s = u|_{M_s^*}$ в когомологиях $H^2(M_s^*; \mathbb{R})$ не зависит от s . Используйте формулу Картана для

$$\frac{du_s}{ds} = L_Y d\vartheta|_{M_s^*}$$

и не забывайте, что для доказательства независимости класса от s надо выразить эту производную Ли как дифференциал от S^1 -инвариантной формы на \widetilde{M}_s с ядром, содержащим X .

20.7. Докажите в условиях предыдущих задач, что класс $[\omega_s] \in H^2(M_s^*; \mathbb{R})$ меняется линейно по s , а значит интеграл

$$\int_{M_s} \omega_s^{n-1}$$

меняется полиномиально по s .

20.8 (Формула Даюстермаата–Хекмана). Предположим, что на компактном симплектическом многообразии (M, ω) задан гамильтониан H , соответствующее которому векторное поле X имеет все траектории периода 1 (то есть возникает действие окружности S^1 на M) и все критические точки H (неподвижные точки X) изолированы. Докажите, что

$$\int_M e^{-tH} \frac{\omega^n}{n!} = \sum_x \frac{e^{-tH(x)}}{t^n e(x)},$$

где сумма справа идёт по критическим точкам H , а $e(x)$ — целые числа, зависящие от действия S^1 на $T_x M$. Сведите к интегрированию $\vartheta \wedge \omega^{n-1}$ по поверхностям уровня $\{H(x) = s\}$.

20.9 (Торическое многообразие). Пусть тор T^n действует на замкнутом симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) гамильтоновым образом с отображением моментов $\mu : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Докажите, что образ $\mu(M)$ является выпуклым многогранником и мера с плотностью $\frac{\omega^n}{n!}$ на M переходит в равномерную меру на многограннике.

20.10. * Какие есть ограничения на комбинаторный тип многогранников, получаемых в предыдущей задаче?

20.11. Докажите, что преобразование Фурье характеристической функции выпуклого многогранника с вершинами $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^n$ выражается как

$$\int_P e^{ikx} dx = \sum_{m=1}^N r_m(k) e^{ikv_m},$$

где $r_m(k)$ — рациональная функция от k . Напишите выражение для $r_m(k)$ для *простых вершин*, то есть для вершин, в которых сходятся ровно n рёбер.

20.12. Пусть гамильтониан $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ является положительно определённой квадратичной формой и соответствующее векторное поле X не имеет замкнутых траекторий периода меньше 1 (кроме начала координат). Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-H} \frac{\omega^n}{n!} \geq 1.$$

20.13 (Нерешённая задача). ** Пусть строго выпуклый чётный гамильтониан $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет минимум в нуле $H(0) = 0$ и соответствующее векторное поле X не имеет замкнутых траекторий периода меньше 1 (кроме начала координат). Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-H} \frac{\omega^n}{n!} \geq 1.$$

20.14. ** Докажите, что утверждение предыдущей задачи неверно уже в \mathbb{R}^4 , если опустить условие чётности $H(-z) = H(z)$.

21. КОМПЛЕКСНЫЕ И ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ

21.1. Докажите, что на всяком симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) существует совместимая почти комплексная структура J , то есть найдётся риманова метрика g , такая что $g(X, Y) = \omega(JX, Y)$. Докажите, что любые две таких почти комплексных структуры гомотопны, то есть одну можно непрерывно деформировать в другую. Вспомните задачу [12.23](#).

21.2. Докажите, что у всякого симплектического многообразия (M^{2n}, ω) можно корректно определить классы Чженя касательного расслоения (если вы знаете про характеристические классы).

21.3. Докажите, что если на замкнутом подмножестве X симплектического подмногообразия (M, ω) задана совместимая с ω комплексная структура J , продолжающаяся на окрестность X , то её можно продолжить на всё M совместимым с ω образом.

21.4. * Пусть на симплектическом многообразии (M, ω) действует симплектоморфизмами компактная группа Ли G . Докажите, что на M существует почти комплексная структура J , совместимая с ω и инвариантная относительно действия G .

21.5. Напишите явный вид симплектической формы Фубини–Штуди ω_{FS} на комплексном проективном пространстве CP^n и римановой метрики g_{FS} , которая соответствует этой форме и стандартной комплексной структуре на CP^n . Напишите явную формулу для

расстояния между двумя точками в этой метрике, опишите геодезические в этой метрике и найдите диаметр $\mathbb{C}P^n$.

21.6. * Найдите риманову кривизну для метрики Фубини–Штуди на проективном пространстве.

21.7. Рассмотрим единичный шар $B^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$. Докажите, что для линейных подпространств $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ размерности $2k$ площадь сечения $V \cap B^{2n}$ не меньше интеграла от $\omega^k/k!$ по $V \cap B^{2n}$.

21.8. Пусть на симплектическом многообразии (M, ω) дана совместимая почти комплексная структура J и риманова структура $g(x, y) = \omega(Jx, y)$. Риманова структура определяет риманов объём $\text{vol}_{2k} N$ для $2k$ -мерных вложенных многообразий $N \subset M$ (вспомните формулу), пусть N будет компактно и возможно с краем. Докажите, что имеет место неравенство

$$\text{vol}_k N \geq \int_N \omega^k/k!,$$

равенство в котором достигается только тогда, когда касательное пространство TN инвариантно относительно J во всех точках N и правильно ориентировано относительно этой комплексной структуры.

21.9. Докажите, что если $N \subset M$ таково, что TN в каждой точке инвариантно относительно почти комплексной структуры J , то N имеет локально минимальный объём относительно непрерывных деформаций с компактным носителем, оставляющих на месте край ∂N .

21.10 (Лемма Шварца). Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — единичный открытый диск. Докажите, что аналитическое отображение $f : D \rightarrow D$ имеет в нуле производную по модулю не большую единицы.

21.11. Опишите все аналитические диффеоморфизмы $D \rightarrow D$.

21.12. Докажите, что множество аналитических отображений $f : D \rightarrow D$ компактно в открыто-замкнутой топологии. Докажите, что его подмножество, состоящее из инъективных отображений, тоже компактно.

21.13 (Теорема Римана об отображении). * Докажите, что всякая односвязная область $U \subset \mathbb{C}$, не совпадающая со всем \mathbb{C} , аналитически диффеоморфна диску D .

21.14. Пусть $S \in \mathbb{C}^n$ — голоморфная кривая, собственно вложенная в \mathbb{C}^n и содержащая начало координат. Докажите, что её пересечение со сферой $S_r^{2n}(0)$ имеет длину не менее $2\pi r$, а пересечение с шаром $B_r^{2n}(0)$ имеет площадь не менее πr^2 .

21.15 (Тензор Найенхауса). Для почти комплексной структуры J на M выпишем выражение от двух векторных полей X, Y

$$N(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY].$$

Проверьте, что в координатном представлении оно не зависит от производных X, Y , то есть является тензором. Проверьте, что на \mathbb{C}^n с его стандартной комплексной структурой $N(X, Y) \equiv 0$.

21.16. ** Докажите, что если $N(X, Y) \equiv 0$ на M , то локально M диффеоморфно \mathbb{C}^n с его комплексной структурой. Рассмотрите случай, когда компоненты J являются не просто гладкими, а вещественно-аналитическими функциями.

21.17. * Докажите, что всякая комплексная структура на \mathbb{R}^2 локально диффеоморфна стандартной комплексной структуре на \mathbb{C} .

21.18. * Какие бывают комплексные структуры на \mathbb{R}^2 с точностью до глобального диффеоморфизма?