Продвинутый матанализ для начинающих на первом курсе ФОПФ

(1) Метрические пространства и их топология.
(2) Компактность в метрических пространствах.
(3) Топологические пространства и компактность в них.
(4) Равномерная непрерывность функций.
(5) Разрывные и полунепрерывные функции.
(6) Кривые, линейная связность и связность.
(7) Длина кривой в метрическом пространстве.
(8) Приближение функций и теорема Стоуна–Вейерштрасса.
(9) Продолжение непрерывных функций.

Список задач для самостоятельного решения

Вспомните определения: *метрическое пространство*, *отношение эквивалентности.*

Задача 0.1. Пусть на множестве M есть *полурасстояние* $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$, имеющее все свойства метрики, кроме свойства невырожденности, заменённого на более слабое свойство $\rho(x,x) \equiv 0$. Докажите, что отношение, определённое как

$$x \sim y \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0,$$

является отношением эквивалентности, а на множестве $M/\sim$ функция ρ корректно задаёт невырожденную метрику.

Вспомните определения: *евклидово пространство*, *топология в метрическом пространстве.*

Задача 0.2. Проверьте, что стандартная метрика евклидова пространства и метрика $\rho(x,y) = \|x-y\|_1$ (сумма модулей координат разности векторов) определяют одну и ту же топологию $\mathbb{R}^n$.

Вспомните определения: *фундаментальная последовательность*, *полное метрическое пространство.*

Задача 0.3. * Приведите пример полного метрического пространства, в котором последовательность вложенных замкнутых шаров не имеет общей точки.

Вспомните определения: *компактность*, *секвенциальная компактность.*

Задача 0.4. Точка p метрического пространства M является *предельной точкой* последовательности точек (p_n) в M, есть p является пределом некоторой подпоследовательности (p_{n_k}). Точка p метрического пространства M является *точкой сгущения* последовательности точек (p_n) в M, есть в любой окрестности p лежит бесконечное количество членов последовательности (p_n). Докажите, что понятия предельной точки и точки сгущения в метрическом пространстве совпадают.

Задача 0.5. * Докажите, что из секвенциальной компактности метрического пространства X следует его компактность (см. определения в [1]).

Задача 0.6. Докажите, что если компактное метрическое пространство X покрыто открытыми множествами $\{U_\alpha\}$, то найдётся $\delta > 0$, такое, что всякое подмножество $Y \subseteq X$ диаметра не более δ содержится в каком-то одном из множеств U_α полностью.

Вспомните определения: *топологическое пространство*, *отделимость*, *компактность.*

Задача 0.7. Докажите, что если в топологическом пространстве у любых двух точек найдутся непересекающиеся окрестности, то компактные множества в этом пространстве будут замкнутыми.

Задача 0.8. * Приведите пример топологического пространства, в котором не все компактные множества замкнуты.

Вспомните определения: *топология произведения.*

Задача 0.9. Докажите, что для всякого метрического пространства M его функция расстояния $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$ непрерывна в топологии произведения на $M \times M$.

Задача 0.10. Докажите, что произведение двух компактных топологических пространств компактно.

Вспомните определения: *кривая.*

Задача 0.11. Придумайте кривую $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, образ которой равен квадрату $[0,1]^2$.

Вспомните определения: *длина кривой*, *спрямляемая кривая.*

Задача 0.12. Докажите, что спрямляемая $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ кривая не может заполнить весь квадрат $[0,1]^2$.

Вспомните определения: *индуцированная топология*, *связное множество*, *линейно связное множество.*

Задача 0.13. Приведите пример связного множества на плоскости, которое не является линейно связным.

Вспомните определения: *равномерная непрерывность.*

Задача 0.14. Докажите, что если непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет конечные пределы при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, то она равномерно непрерывна.

Задача 0.15. Докажите, что если функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, равномерно непрерывна, то она продолжается до непрерывной функции на замыкании множества X.

Вспомните определения: *полунепрерывная снизу функция.*

Задача 0.16. Приведите пример полунепрерывной снизу функции на отрезке, не имеющей максимального значения.

Вспомните определения: *колебание функции/отображения в точке*, *полунепрерывная сверху функция.*

Задача 0.17. Докажите, что для любого отображения $f : M \to N$ между метрическими пространствами функция колебания в точке $\omega(f, x)$ является полунепрерывной сверху.

Вспомните *теорему Бэра для замкнутых множеств.*

Задача 0.18. * Докажите, что не существует функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывной в рациональных точках, и разрывной в иррациональных точках.

Вспомните определения: *длина кривой в метрическом пространстве*, *внутренняя метрика.*

Задача 0.19. * Докажите, что в метрическом пространстве с компактными шарами минимум в определении внутренней метрики (минимальной длины кривой, соединяющей две заданные точки), если он конечный, достигается на некоторой (возможно не единственной) кривой, называемой *кратчайшей.*

Вспомните определения: *равномерная сходимость последовательности функций.*

Задача 0.20. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и имеет компактный носитель (равна нулю за пределами некоторого отрезка), а $t_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность функций

$$f_n(x) = f(x - t_n)$$

равномерно стремится к f.

Вспомните определение и свойства *ряда Тейлора.*

Задача 0.21. Докажите, что функцию $\sqrt{x}$ можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленами на любом фиксированном отрезке $[0, a]$.

Задача 0.22. Докажите, что функцию $|x|$ можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленами на любом отрезке $[-a, a]$.

Вспомните определение *кусочно-линейной функции.*

Задача 0.23. Докажите, что всякая кусочно-линейная непрерывная на отрезке функция является линейной комбинацией функций вида $a|x - x_0|$ и константы.

Вспомните определения: *разбиение единицы.*

Задача 0.24. Докажите, что для всякого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^2$ найдётся непрерывная функция $f : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$, которая равна единице на K и равна нулю за пределами наперёд заданной окрестности $U_\varepsilon(K)$.

Вспомните определения: *метрическая проекция.*

Задача 0.25. * Докажите, что непрерывную на компакте $K \subset \mathbb{R}^2$ функцию можно продолжить непрерывно на всю плоскость $\mathbb{R}^2$ так, что она будет равна нулю за пределами наперёд заданной окрестности $U_\varepsilon(K)$.

Вспомните определения: *липшицево отображение*, *математическая индукция.*

Задача 0.26. * Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^2$ и отображение $f : X \to \mathbb{R}^2$ является 1-липшицевым ($|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ для любых двух точек $x, y \in X$). Докажите, что f можно продолжить до 1-липшицевого отображения $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Вспомните определение: *мера Лебега*, *счётная аддитивность.*

Задача 0.27. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу, а множество

$$S = \{M \in \mathbb{R} \mid f(x) \leqslant M \text{ почти всюду}\}$$

непусто. Докажите, что M имеет минимальный элемент.

Вспомните определение: *измеримая по Лебегу функция.*

Задача 0.28. Приведите пример, показывающий, что композиция измеримых по Лебегу функций одной переменной не обязательно измерима по Лебегу.

Вспомните определение: *интеграл Римана*, *интеграл Лебега.*

Задача 0.29. * Докажите, что $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена и множество её точек разрыва имеет меру Лебега нуль.

Задача 0.30. Приведите пример непрерывной и непостоянной на отрезке функции, у которой производная почти всюду (по мере Лебега) существует и почти всюду равна нулю.

Определения и пояснения смотрите в конспекте

[1] Р.Н. Карасёв. *Отдельные темы математического анализа.* rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf.