Продвинутый матанализ для начинающих на первом курсе ФОПФ

(1) Метрические пространства и их топология.
(2) Компактность в метрических пространствах.
(3) Равномерная непрерывность функций.
(4) Разрывные и полунепрерывные функции.
(5) Кривые, линейная связность и связность.
(6) Длина кривой в метрическом пространстве.
(7) Приближение функций и теорема Стоуна–Вейерштрасса.
(8) Продолжение непрерывных функций.

Список задач для самостоятельного решения

Вспомните определения: *метрическое пространство*, *отношение эквивалентности*.

Задача 0.1. Пусть на множестве M есть *полурасстояние* $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$, имеющее все свойства метрики, кроме свойства невырожденности, заменённого на более слабое свойство $\rho(x, x) \equiv 0$. Докажите, что отношение, определённое как

$$x \sim y \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0,$$

является отношением эквивалентности, а на множестве $M/\sim$ функция ρ корректно задаёт невырожденную метрику.

Вспомните определения: *ограниченное множество*, *диаметр*.

Задача 0.2. Докажите, что подмножество метрического пространства ограничено тогда и только тогда, когда оно имеет конечный диаметр.

Вспомните определения: *евклидово пространство*, *топология в метрическом пространстве*.

Задача 0.3. Проверьте, что стандартная метрика евклидова пространства и метрика $\|x - y\|_\infty$ (максимум модуля разности координат) определяют одну и ту же топологию в $\mathbb{R}^n$.

Вспомните определения: *фундаментальная последовательность*, *полное метрическое пространство*.

Задача 0.4. * Приведите пример полного метрического пространства, в котором последовательность вложенных замкнутых шаров не имеет общей точки.

Вспомните определения: *компактность*, *секвенциальная компактность*.

Задача 0.5. * Докажите, что из секвенциальной компактности метрического пространства X следует его компактность (см. определения в [1]).

Задача 0.6. Докажите, что если компактное метрическое пространство X покрыто открытыми множествами $\{U_\alpha\}$, то найдётся $\delta > 0$, такое, что всякое подмножество $Y \subseteq X$ диаметра не более δ содержится в каком-то одном из множеств U_α полностью.

Вспомните определения: *топология произведения*.

Задача 0.7. Докажите, что для всякого метрического пространства M его функция расстояния $\rho : M \times M \to \mathbb{R}^+$ непрерывна в топологии произведения на $M \times M$.

Вспомните определения: *ε-окрестность множества*.

Задача 0.8. Докажите, что если компактное множество $K \subseteq \mathbb{R}^n$ содержится в открытом множестве U, то оно содержится в U вместе с некоторой своей ε-окрестностью.

Вспомните определения: *кривая*.

Задача 0.9. * Придумайте кривую $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, образ которой равен квадрату $[0, 1]^2$.

Вспомните определения: *кусочно-гладкая кривая.*

Задача 0.10. Докажите, что кусочно-гладкая кривая не может заполнить весь квадрат.

Вспомните определения: *относительная топология*, *связное множество*, *линейно связное множество.*

Задача 0.11. Приведите пример связного множества на плоскости, которое не является линейно связным (см. определения в [1]).

Вспомните определения: *равномерная непрерывность.*

Задача 0.12. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, то существуют константы $L, C > 0$, такие что для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$ выполняется

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y| + C.$$

Вспомните определения: *замыкание множества.*

Задача 0.13. Докажите, что если функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, равномерно непрерывна, то она продолжается до непрерывной функции на замыкании множества X.

Вспомните определения: *частичный предел.*

Задача 0.14. Докажите, что если функция f непрерывна в проколотой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 2$, то множество её частичных пределов в x_0 является промежутком.

Вспомните определения: *полунепрерывная снизу функция.*

Задача 0.15. Приведите пример полунепрерывной снизу функции (см. определения в [1]) на отрезке, не имеющей максимального значения.

Вспомните определения: *колебание отображения в точке.*

Задача 0.16. Докажите, что для любого отображения $f : M \to N$ между метрическими пространствами функция колебания в точке $\omega(f, x)$ является полунепрерывной сверху.

Задача 0.17. * Докажите, что не существует функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывной в рациональных точках, и разрывной в иррациональных точках.

Вспомните определения: *длина кривой*, *внутренняя метрика.*

Задача 0.18. * Докажите, что в метрическом пространстве с компактными шарами минимум в определении внутренней метрики (минимальной длины кривой, соединяющей две заданные точки), если он конечный, достигается на некоторой (возможно не единственной) кривой, называемой *кратчайшей.*

Вспомните определения: *равномерная сходимость последовательности функций.*

Задача 0.19. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и имеет компактный носитель (равна нулю за пределами некоторого отрезка), а $t_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность функций

$$f_n(x) = f(x - t_n)$$

равномерно стремится к f.

Задача 0.20. Докажите, что функцию $\sqrt{x}$ можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленами на любом фиксированном отрезке $[0, a]$.

Задача 0.21. Докажите, что функцию $|x|$ можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленами на любом отрезке $[-a, a]$.

Задача 0.22. Докажите, что всякая кусочно-линейная непрерывная на отрезке функция является линейной комбинацией функций вида $a|x - x_0|$ и константы.

Задача 0.23. Определим функции для положительных δ

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} 0, & x < -\delta; \\ 1 - |x|/\delta, & |x| \leqslant \delta; \\ 0, & x > \delta. \end{cases}$$

Пусть дана непрерывная функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Докажите, что последовательность функций

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} f(k/m)\varphi_{1/m}(x - k/m)$$

равномерно стремится к f.

Задача 0.24. Пусть дана непрерывная функция $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$. Докажите, что последовательность функций

$$f_m(x) = \sum_{0 \leqslant k_1, k_2 \leqslant m} f\left(k_1/m, k_2/m\right) \varphi_{1/m}\left(x_1 - k_1/m\right) \varphi_{1/m}\left(x_2 - k_2/m\right)$$

равномерно стремится к f.

Задача 0.25. Выведите из предыдущих задач, что всякую непрерывную $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом, и всякую $g : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом от двух переменных.

Задача 0.26. Докажите, что всякую непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию f, для которой $f(-\pi) = f(\pi)$, можно сколь угодно близко равномерно приблизить тригонометрическими многочленами вида

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right).$$

Задача 0.27. Докажите, что для всякого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^2$ найдётся непрерывная функция $f : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$, которая равна единице на K и равна нулю за пределами наперёд заданной окрестности $U_\varepsilon(K)$.

Задача 0.28. * Докажите, что непрерывную на компакте $K \subset \mathbb{R}^2$ функцию можно продолжить непрерывно на всю плоскость $\mathbb{R}^2$ так, что она будет равна нулю за пределами наперёд заданной окрестности $U_\varepsilon(K)$.

Задача 0.29. * Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^2$ и отображение $f : X \to \mathbb{R}^2$ является 1-липшицевым ($|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ для любых двух точек $x, y \in X$). Докажите, что f можно продолжить до 1-липшицевого отображения $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Определения и пояснения смотрите в конспекте

[1] Р.Н. Карасёв. *Отдельные темы математического анализа.* rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf.