МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ФОПФ
ПОТОК Р.Н. КАРАСЁВА

1-й семестр. Непрерывность и дифференцируемость функций одной и нескольких переменных

Множества и действительные числа

1) Натуральные, целые, рациональные числа.
2) Основные понятия теории множеств. Объединение, пересечение и декартово произведение. Отображения и последовательности.
3) Пределы и фундаментальные последовательности рациональных чисел, определение действительных чисел.
4) Арифметические операции и сравнение действительных чисел.
5) Предел последовательности действительных чисел. Полнота множества действительных чисел (критерий Коши).

Свойства пределов последовательностей

6) Бесконечные пределы. Существование предела монотонной последовательности.
7) Переход к пределу в неравенствах, единственность предела последовательности.
8) Существование общей точки последовательности вложенных отрезков. Единственность общей точки для стягивающейся последовательности.
9) Точные грани числовых множеств: определение, существование и единственность. Другие определения действительных чисел.
10) Бесконечно малые последовательности и их свойства. Предел суммы, разности, произведения и частного.

Определение элементарных функций

11) Неравенство Бернулли, экспонента и логарифм.
12) Тригонометрические функции, их определение и свойства. Неравенства $|\sin t| < |t| < |\operatorname{tg} t|$ при $0 < |t| < \frac{\pi}{2}$.

Частичные пределы, топология на прямой и мощности

13) Частичные пределы, верхний и нижний пределы. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Теорема о единственном частичном пределе.
14) Топология на множестве действительных чисел. Открытые, замкнутые и компактные множества. Критерий компактности.
15) Биекции и мощность множеств. Сравнение мощностей.
16) Теоремы о счётности множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и несчётности множества $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Непрерывные функции и их свойства

17) Непрерывность функции в точке. Определение по Коши и по Гейне.
18) Непрерывность суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций.
19) Теорема о непрерывности композиции функций.
20) Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.
21) Непрерывность монотонного отображения промежутка на промежуток. Непрерывность обратной функции.
22) Топологическое определение непрерывности функции и его эквивалентность другим определениям.
23) Свойства функций, непрерывных на компактных множествах.

Пределы функций

24) Два определения предела функции (по Коши и по Гейне). Их эквивалентность.
25) Свойства пределов функций, связанные с неравенствами и арифметическими операциями.
26) Односторонние пределы. Теорема об односторонних пределах монотонных функций.
27) Критерий Коши существования предела функции.
28) Сравнение асимптотического поведения функций. Порядок функции, асимптотическая эквивалентность, символы o и O.

Производная и её свойства

29) Определение и геометрический смысл производной. Производные функций $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\log_a x$.
30) Линейное приближение и дифференциал функции. Непрерывность дифференцируемой функции.
31) Производная суммы, разности, произведения и частного.
32) Производная композиции функций. Производная функции x^α.
33) Производная обратимой функции. Производные обратных тригонометрических функций.

Исследование функций с помощью производной

34) Локальные экстремумы. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля.
35) Теоремы Лагранжа и Коши о среднем значении.
36) Условия постоянства, возрастания и убывания дифференцируемой функции.
37) Достаточные условия экстремума дифференцируемой функции.
38) Достаточное условие выпуклости дифференцируемой функции.
39) Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей вида $0/0$.
40) Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей вида ∞/∞.

Производные высших порядков

41) Формула Лейбница для n-й производной произведения двух функций.
42) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
43) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
44) Разложения по формуле Тейлора элементарных функций: $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha$.

Метрические пространства, их подмножества и топология

45) Метрические пространства, пределы последовательностей точек и полнота.
46) Евклидовы n-мерные пространства. Неравенства Коши–Буняковского–Шварца и треугольника, полнота евклидова пространства.
47) Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах и их свойства.
48) Внутренность, замыкание и граница подмножества метрического пространства. Открытость внутренности, замкнутость замыкания и границы.
49) Индуцированная метрика и топология на подмножествах метрического пространства, относительно замкнутые и открытые множества.
50) Связные множества в метрических пространствах. Описание связных подмножеств числовой прямой.
51) Компактные множества в метрическом пространстве и критерий компактности в евклидовом пространстве.
52) Компактность и секвенциальная компактность в метрических пространствах.

Непрерывные отображения метрических пространств

53) Непрерывные отображения метрических пространств. Определение непрерывности в точке по Коши и по Гейне. Топологическое определение непрерывности на множестве.
54) Свойства непрерывных отображений, определённых на компакте и на связных множествах.
55) Расстояние между точкой и множеством и между двумя множествами в метрическом пространстве. Достаточное условие достижимости расстояния между множествами в евклидовом пространстве.
56) Кривые в метрическом пространстве и их конкатенация. Линейная связность метрического пространства, её сравнение со связностью и сохранение линейной связности при непрерывных отображениях.
57) Равномерно непрерывные отображения метрических пространств, модуль непрерывности. Теорема о равномерной непрерывности отображения на компакте.
58) Полунепрерывные функции, достаточные условия достижимости минимума на компакте. Колебание функции в точке и его полунепрерывность.

Длина кривой в метрическом пространстве

59) Определение и свойство аддитивности длины дуги кривой.
60) Спрямляемые кривые. Непрерывная зависимость длины дуги кривой от параметра, натуральная параметризация кривой.
61) Спрямляемость непрерывно дифференцируемой кривой в евклидовом пространстве. Производная длины дуги по параметру.
62) Кривизна и формулы Френе для кривой на евклидовой плоскости. Радиус кривизны, центр кривизны и эволюта.
63) Кривизна, главная нормаль и бинормаль кривой в $\mathbb{R}^3$. Кручение и формулы Френе для кривой ненулевой кривизны.

Многочлены с комплексными коэффициентами

64) Теорема о существовании комплексного корня многочлена с комплексными коэффициентами. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители.
65) Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя многочленов. Разложение рациональной функции на элементарные дроби.

2-й семестр. Числовые и функциональные ряды, мера, интеграл

Абсолютно сходящиеся числовые ряды

1) Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства. Перестановка слагаемых абсолютно сходящихся рядов.
2) Повторное суммирование и теорема о перемножении абсолютно сходящихся рядов.
3) Сравнение абсолютно сходящихся рядов. Сумма геометрической прогрессии.

Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

4) Равномерно сходящиеся функциональные последовательности и ряды. Критерий Коши равномерной сходимости.
5) Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
6) Теорема о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.
7) Теорема о производной предела последовательности дифференцируемых функций. Почленное дифференцирование функциональных рядов.

Степенные ряды

8) Степенные ряды, их радиус сходимости. Равномерная сходимость степенных рядов в круге.
9) Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
10) Производные и первообразные степенных рядов в круге сходимости.
11) Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Разложение функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ в степенные ряды.
12) Разложение функций $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ в степенные ряды.
13) Разложение функции $(1+x)^\alpha$ в степенной ряд.

Условная сходимость числовых и функциональных рядов

14) Преобразование Абеля. Сходимость степенного ряда на конце интервала сходимости.
15) Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.
16) * Перестановка слагаемых в условно сходящемся числовом ряде.

Интеграл Римана на отрезке

17) Разбиения отрезка, суммы Дарбу и интеграл Римана. Ступенчатые функции на отрезке, линейность и монотонность интеграла от ступенчатой функции.
18) Свойства интеграла Римана на отрезке: линейность, аддитивность, монотонность.
19) Интегрируемость по Риману модуля и произведения интегрируемых функций.
20) Суммы Римана интегрируемых функций и мелкость разбиений.
21) Интегрируемость по Риману непрерывной на отрезке функции.
22) Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу и существование первообразной у непрерывной функции.
23) Интегрируемость по Риману монотонной функции.
24) Формула Ньютона–Лейбница для интеграла Римана на отрезке.
25) Интегрирование по частям и замена переменных в интеграле Римана. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
26) Иррациональность числа e. * Доказательство иррациональности числа π по Нивену–Бурбаки.

Мера Лебега и её свойства

27) Мера элементарных множеств в евклидовом пространстве, корректность её определения и аддитивность.
28) Внешняя мера Лебега для подмножеств $\mathbb{R}^n$. Счётная субаддитивность внешней меры Лебега и её значение для элементарных множеств.

29) Расстояние между множествами в смысле внешней меры Лебега. Множества конечной меры Лебега и теоретико-множественные операции с ними.
30) Счётная аддитивность меры Лебега для множеств конечной меры.
31) Множества с возможно бесконечной мерой Лебега, операции с ними и счётная аддитивность меры Лебега в общем случае.
32) Счётные объединения и пересечения измеримых по Лебегу множеств.
33) Свойства непрерывности и регулярности меры Лебега.
34) * Пример неизмеримого по Лебегу множества.
35) Измеримые по Лебегу функции и их свойства. Измеримость поточечного предела измеримых функций.
36) Борелевские множества, борелевские функции и их свойства.

Интеграл Лебега и его свойства

37) Счётно-ступенчатые функции и интеграл Лебега для них.
38) Приближение измеримой функции ступенчатыми и интеграл Лебега для измеримой функции.
39) Существование возможно бесконечного интеграла Лебега для неотрицательной измеримой функции.
40) Абсолютная интегрируемость интегрируемой по Лебегу функции и её разложение на неотрицательную и неположительную часть.
41) Линейность и монотонность интеграла Лебега.

Предельный переход в интеграле Лебега

42) Понятие приближения функции в среднем. Приближение интегрируемой функции в среднем ограниченной функцией.
43) Приближение в среднем интегрируемой функции функцией с конечным числом элементарных ступенек.
44) Счётная аддитивность интеграла Лебега по множествам интегрирования.
45) Непрерывность интеграла Лебега по множествам интегрирования и непрерывность интеграла Лебега по отрезку с переменным верхним пределом.
46) Теорема о монотонной сходимости. Перестановка счётного суммирования и интегрирования.
47) Теорема об ограниченной сходимости.
48) * Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

Несобственные интегралы функции одной переменной

49) Вторая теорема о среднем для интеграла произведения функций по отрезку.
50) Несобственные интегралы. Связь сходимости несобственного интеграла с существованием интеграла Лебега. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.
51) Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.
52) Интегральный признак сходимости ряда неотрицательных чисел.

Повторное интегрирование и линейная замена переменных в интеграле Лебега

53) Представление неотрицательной измеримой функции в виде суммы счётного числа ступенек.
54) Мера декартова произведения измеримых множеств.
55) Теорема Фубини для борелевских функций.
56) Теорема Фубини для измеримых функций.
57) Мера подграфика неотрицательной функции и представление интеграла неотрицательной функции через интегрирование по области значений.
58) Линейная замена переменных в интеграле Лебега.

Применения интеграла Лебега

59) Интегралы, зависящие от параметра. Достаточные условия возможности переставить интегрирование и дифференцирование по параметру.
60) Интегральная теорема о среднем для непрерывной на связном множестве функции.
61) Вычисление интеграла Пуассона и объёма единичного шара в $\mathbb{R}^n$.
62) Гамма-функция, формула понижения и её значения при целых и полуцелых значениях аргумента.
63) Бета-функция и её выражение через гамма-функцию.
64) Асимптотическая формула Стирлинга для гамма-функции.

* **Дифференцируемость почти всюду**

65) * Лемма Безиковича о покрытии отрезками на прямой.
66) * Теорема о плотности измеримого множества на прямой.
67) * Усреднение интегрируемой по Лебегу на прямой функции, дифференцируемость почти всюду интеграла с переменным верхним пределом.
68) * Существование производной почти всюду и формула Ньютона–Лейбница для липшицевой функции одной переменной.

Дифференцирование функций нескольких переменных

69) Дифференцируемые функции нескольких переменных. Частные производные.
70) Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных в точке.
71) Производные и дифференциалы функции нескольких переменных высших порядков. Теорема о независимости смешанной производной от порядка дифференцирования.
72) Формула Тейлора для функций нескольких переменных.

3-й семестр. Дифференциальная геометрия

Свёртка и приближение функций бесконечно гладкими

1) Свёртка функций и её ассоциативность. Дифференцирование свёртки.
2) Бесконечно гладкие функции с компактным носителем, примеры.
3) Приближение функции в $\mathbb{R}^n$ (вместе с производными) бесконечно гладкими функциями.

Дифференцируемые отображения и криволинейные системы координат

4) Дифференцируемые отображения и производная композиции отображений.
5) Теорема о существовании обратного отображения. Локальные системы криволинейных координат.
6) Теорема о системе неявных функций, определяемых системой уравнений (случай гладких уравнений).
7) Теорема о расщеплении гладкого отображения на простые гладкие отображения.

Дифференциал, гессиан и исследование функции на экстремум

8) Дифференциал функции как линейный функционал. Корректность определения второго дифференциала (гессиана) функции как квадратичной формы на касательных векторах для случая, когда первый дифференциал функции равен нулю.
9) Локальные максимумы и минимумы функций многих переменных. Необходимое условие экстремума непрерывно дифференцируемой функции.
10) Необходимые и достаточные условия экстремума дважды непрерывно дифференцируемых функций.
11) Условные экстремумы. Необходимое условие условного экстремума в терминах первых производных. Метод множителей Лагранжа.
12) Необходимые и достаточные условия условного экстремума с использованием вторых производных.

Векторы и дифференциальные формы первой степени

13) Касательные векторы к открытому подмножеству $\mathbb{R}^n$ в точке. Определение через дифференцирование функций в точке и явный вид.
14) Касательное пространство в точке и дифференциал отображения как отображение касательных пространств. Векторные поля на открытых областях в $\mathbb{R}^n$.
15) Дифференциальные формы первой степени и дифференциалы функций. Замена координат в дифференциальной форме первой степени.

Дифференциальные формы высших степеней

16) Дифференциальные формы произвольной степени на открытых множествах в $\mathbb{R}^n$, их определение и свойства.
17) Внешнее умножение дифференциальных форм, нормировка внешнего умножения и координатная запись дифференциальных форм произвольной степени.
18) Оператор внешнего дифференцирования d, его аксиоматические свойства, существование, единственность и независимость от выбора криволинейной системы координат в области в $\mathbb{R}^n$.
19) Замена координат в дифференциальной форме и обратный образ дифференциальной формы при гладких отображениях, якобиан замены переменных с точки зрения дифференциальных форм.

Интегрирование дифференциальных форм

20) Интегрирование дифференциальной формы n-й степени с компактным носителем по $\mathbb{R}^n$. Равенство нулю интеграла дифференциала формы с компактным носителем.
21) Представление формы n-й степени с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$ в каноническом виде с точностью до дифференциала формы с компактным носителем.
22) Гладкое разбиение единицы в окрестности компактного подмножества $\mathbb{R}^n$, подчинённое покрытию этого подмножества.
23) Поведение интеграла от формы с компактным носителем в области $\mathbb{R}^n$ при линейной замене координат.
24) Поведение интеграла от формы с компактным носителем в области $\mathbb{R}^n$ при гладкой замене координат.
25) Формула гладкой замены переменных в интеграле Лебега от функции в $\mathbb{R}^n$.

Многообразия (с краем) и формула Стокса

26) Вложенные многообразия в $\mathbb{R}^N$ и вложенные многообразия с краем. Достаточные условия, когда система уравнений задаёт многообразие.
27) * Абстрактное определение гладкого многообразия. Координатные карты, гладкие функции на многообразии и гладкие отображения между многообразиями.
28) Дифференциальные формы, векторные поля и оператор d на многообразии.
29) Гладкие отображения между многообразиями и параметрически заданные многообразия в $\mathbb{R}^N$.
30) Гладкое разбиение единицы в окрестности компактного подмножества многообразия, подчинённое покрытию этого подмножества.
31) * Гладкое локально конечное разбиение единицы всего многообразия, подчинённое его покрытию.
32) Ориентируемость многообразия в терминах карт, задание ориентации многообразия дифференциальной формой высшей степени. Связь ориентации многообразия и его края.
33) Определение интеграла дифференциальной формы по ориентированному многообразию с помощью разбиения единицы и его независимость от разбиения единицы.
34) Общая формула Стокса.
35) Явный вид частных случаев формулы Стокса в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Кусочно-гладкие ориентированные поверхности.
36) Независимость интеграла дифференциальной формы по кривой на многообразии от пути интегрирования и существование потенциала дифференциальной формы. Необходимое условие существования потенциала.

Элементы дифференциальной топологии

37) Замкнутые и точные дифференциальные формы, оператор цепной гомотопии для обратных образов дифференциальных форм.
38) Определение когомологий де Рама с произвольным и компактным носителем. Когомологии де Рама $\mathbb{R}^n$ и выпуклых областей в $\mathbb{R}^n$.
39) * Когомологии де Рама с компактным носителем в степени n для n-мерного связного многообразия.
40) * Критические и регулярные значения гладкого отображения, теорема Сарда.
41) * Геометрическое определение степени собственного отображения и его корректность.
42) * Определение степени отображения между ориентированными многообразиями с помощью интегрирования форм максимальной степени с компактным носителем.
43) Теорема Брауэра о неподвижной точке.
44) * Существование нигде не нулевых векторных полей на сфере.

Дифференцирование и интегрирование векторных полей

45) Внутреннее дифференцирование и производная Ли дифференциальной формы по векторному полю.
46) Производная Ли векторного поля и её свойства. Скобка Ли векторных полей, формула для её вычисления в координатах, её кососимметричность и тождество Якоби.
47) Интегрирование векторных полей как решение дифференциального уравнения первого порядка. Выпрямление траекторий и достаточные условия неограниченного продолжения решения дифференциального уравнения на многообразии.
48) Однопараметрические группы диффеоморфизмов многообразия, геометрический смысл производной Ли по векторному полю.
49) Дивергенция векторного поля на многообразии с формой объёма, её геометрический смысл.

Римановы и полуримановы многообразия

50) Риманова структура на многообразии, её существование.
51) Риманов объём, произведение римановых многообразий и риманов объём на произведении.
52) Риманов объём многообразий в евклидовом пространстве с индуцированной римановой структурой. Формула риманова объёма двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ с векторным произведением.
53) Скалярное произведение на произвольных тензорах и определение оператора $*$ для дифференциальных форм.
54) Выражение оператора $*$ в евклидовом пространстве для ортонормированных и сферических координат. Выражение дивергенции, градиента и ротора в $\mathbb{R}^3$ через оператор $*$, выражение лапласиана в сферических координатах.
55) Ковариантное дифференцирование, его аксиоматические свойства. Формула Козюля и существование ковариантного дифференцирования.
56) Длина кривой на римановом многообразии и действие кривой. Определение метрики на римановом многообразии.
57) Геодезические и их уравнение. Перенос вектора вдоль кривой с помощью ковариантного дифференцирования.
58) * Тензор кривизны Римана, его свойства симметрии и геометрический смысл. Тензор Риччи и скалярная кривизна.
59) Пространство-время специальной теории относительности, его геодезические и изометрии.
60) Движение в электромагнитном поле, дифференциальная форма электромагнитного поля, инвариантный вид уравнений Максвелла.
61) Риманова структура на сфере, её геодезические, изометрии и кривизна.
62) Риманова структура в гиперболическом пространстве, его геодезические, изометрии и кривизна.
63) Полуриманова структура в пространстве де Ситтера и анти-пространстве де Ситтера, описание световых лучей.
64) Метрика Шварцшильда и описание радиальных световых лучей в ней.

Площадь поверхности по Минковскому и изопериметрическое неравенство

65) * Площадь поверхности по Минковскому для гиперповерхностей, её равенство риманову объёму.
66) * Риманов объём n-мерной сферы.
67) * Неравенство Брунна–Минковского, логарифмическое и функциональное неравенство Брунна–Минковского.
68) * Изопериметрическое неравенство для площади поверхности Минковского.

4-й семестр. Гармонический анализ

Приближение функций равномерно, в среднем и среднеквадратичном

1) Равномерное приближение непрерывной функции на отрезке алгебраическими многочленами.
2) Приближение непрерывных 2π-периодических функций тригонометрическими многочленами.
3) * Алгебры непрерывных на компактах функций. Теорема Стоуна–Вейерштрасса.
4) Пространства L_p. Неравенства Гёльдера и Минковского.
5) Полнота пространства L_p.
6) Приближение функций в L_p ступенчатыми и бесконечно гладкими.

Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция

7) Функции ограниченной вариации, представление функции ограниченной вариации в виде суммы монотонных и ограниченных.
8) Абсолютно непрерывные функции, абсолютная непрерывность интеграла с переменным верхним пределом.
9) Представление абсолютно непрерывной функции в виде суммы монотонных абсолютно непрерывных функций.
10) Существование производной почти всюду у абсолютно непрерывной функции и обобщённая формула Ньютона–Лейбница.
11) Абсолютная непрерывность произведения абсолютно непрерывных функций и обобщённое интегрирование по частям.
12) Теорема Римана об осцилляции и равномерной осцилляции.
13) Порядок убывания коэффициентов Фурье абсолютно непрерывных и несколько раз обобщённо дифференцируемых функций.
14) Порядок убывания коэффициентов Фурье функций ограниченной вариации.

Ряд Фурье в пространстве L_2

15) Скалярное произведение в пространстве L_2, неравенство Коши–Буняковского.
16) Свойство минимальности коэффициентов Фурье по ортогональной системе функций в L_2 и неравенство Бесселя
17) Полные системы в пространстве L_2. Полнота тригонометрической системы в $L_2[-\pi, \pi]$.
18) Сходимость ряда Фурье в L_2 и равенство Парсеваля для коэффициентов Фурье функций из $L_2[-\pi, \pi]$ по ортогональным системам.

Тригонометрический ряд Фурье и его сходимость

19) Интегральное представление частичных сумм тригонометрического ряда Фурье, ядро Дирихле.
20) Принцип локализации для рядов Фурье и равномерный принцип локализации.
21) Признак Липшица равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке.
22) Признак Дирихле равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке.
23) Признаки Липшица и Дирихле сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.
24) Почленное дифференцирование и интегрирование тригонометрических рядов Фурье.
25) Теорема Фейера о суммировании тригонометрического ряда Фурье методом средних арифметических.
26) Представление котангенса и косеканса в виде бесконечной суммы элементарных дробей.
27) Формула дополнения для бета-функции.

Интеграл Фурье и преобразование Фурье

28) Вычисление интеграла Дирихле с помощью дифференцирования по параметру.
29) Представление функций интегралом Фурье, свёртка с ядром Дирихле для интеграла Фурье.
30) Принцип локализации для интеграла Фурье.
31) Признаки Липшица и Дирихле сходимости интеграла Фурье для абсолютно интегрируемой функции.
32) Преобразование Фурье. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
33) Пространство $\mathcal{S}$, его инвариантность при преобразовании Фурье и непрерывность преобразования Фурье как отображения $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.
34) Унитарность преобразования Фурье относительно стандартного скалярного произведения в пространстве $\mathcal{S}$.
35) Продолжение преобразования Фурье на пространство L_2, теорема Планшереля.
36) Явление Гиббса для представления $\operatorname{sgn} x$ интегралом Фурье.
37) Преобразование Фурье функций нескольких переменных. Преобразование Фурье гауссовой плотности.
38) Формула обращения преобразования Фурье функции нескольких переменных с абсолютно интегрируемым преобразованием Фурье.
39) * Формула обращения преобразования Фурье функции нескольких переменных с достаточным количеством непрерывных частных производных.
40) Свёртка функций из L_1 и преобразование Фурье.

Банаховы пространства

41) Нормированные векторные пространства и банаховы пространства. Полнота пространства $C[a, b]$.
42) Теорема Бэра в банаховом пространстве.
43) Двойственное к банахову пространству, эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного функционала.
44) Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха–Штейнгауза) для семейств непрерывных линейных функционалов в банаховых пространствах.
45) Расходимость рядов Фурье непрерывных 2π-периодических функций и норма свёртки с ядром Дирихле.
46) * Явный пример непрерывной 2π-периодической функции, ряд Фурье которой расходится в одной точке.
47) Непрерывные линейные отображения между банаховыми пространствами, их норма, эквивалентность ограниченности и непрерывности.
48) Факторпространство банахового пространства по замкнутому линейному подпространству. Его полнота и норма проекции на факторпространство.
49) Теорема об изоморфизме для непрерывных линейных отображений банаховых пространств.
50) ε-сети в метрических пространствах, эквивалентность предкомпактности и вполне ограниченности подмножества полного метрического пространства.
51) Теорема Арцела–Асколи о предкомпактных подмножествах в пространстве непрерывных на метрическом компакте функций.

Гильбертовы пространства

52) Гильбертовы пространства над действительными и комплексными числами. Неравенство Коши–Буняковского.
53) Полнота и замкнутость ортонормированной системы в гильбертовом пространстве, ряд Фурье по ней, неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.

54) Изометрии гильбертовых пространств и описание с точностью до изометрии гильбертовых пространств, имеющих счётную полную систему.
55) Метрическая проекция на замкнутое аффинное подпространство гильбертового пространства.
56) Описание двойственного к гильбертову пространству.

*** Лемма Цорна и двойственные пространства банаховых пространств**

57) * Теорема Цермело и лемма Цорна.
58) * Теорема Хана–Банаха. Вложение банахова пространства во второе двойственное.
59) * Теорема Тихонова о произведении компактов.
60) $*$-слабая топология двойственного к банахову пространству, компактность в $*$-слабой топологии.
61) * Теорема Хана о разложении меры со знаком.
62) * Теорема Радона–Никодима о плотности абсолютно непрерывной (относительно меры Лебега) меры.
63) * Теорема Рисса о двойственном пространстве к $C[a, b]$.

Распределения (обобщённые функции)

64) Пространство $\mathcal{E}$ и топология в нём. Эквивалентность непрерывности по Коши и Гейне в этом пространстве.
65) Связь непрерывности и ограниченности линейного отображения $\mathcal{E} \to \mathbb{R}$. Пространство $\mathcal{E}'$ распределений с компактным носителем.
66) Описание элементов $\mathcal{E}'$ через интегрирование производных по отрезку.
67) Пространство $\mathcal{D}$ и определение сходимости в нём.
68) Пространство $\mathcal{D}'$ распределений (обобщённых функций). Регулярные и нерегулярные распределения, дельта-функция.
69) Топология и сходимость в пространстве $\mathcal{D}'$, сходимость последовательности регулярных функций к дельта-функции.
70) Дифференцирование распределений, корректность его определения и непрерывность дифференцирования как операции $\mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$.
71) Умножение распределения в $\mathcal{D}'$ на бесконечно гладкие функции, корректность его определения и непрерывность как операции $\mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$.
72) Равенство нулю распределения на открытом множестве, носитель распределения из $\mathcal{D}'$.
73) Пространство $\mathcal{S}'$ обобщённых функций, преобразование Фурье обобщённых функций из $\mathcal{S}'$, преобразование Фурье дельта-функции.
74) * Распределения на многообразиях, бескоординатное определение, сужение распределения на открытое множество.