

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА ФОПФ ПОТОК Р.Н. КАРАСЁВА

1-Й СЕМЕСТР. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Множества и действительные числа

- 1) Натуральные, целые, рациональные числа.
- 2) Основные понятия теории множеств. Объединение, пересечение и декартово произведение. Отображения и последовательности.
- 3) Пределы и фундаментальные последовательности рациональных чисел, определение действительных чисел.
- 4) Арифметические операции и сравнение действительных чисел.
- 5) Предел последовательности действительных чисел. Полнота множества действительных чисел (критерий Коши).

Свойства пределов последовательностей

- 6) Бесконечные пределы. Существование предела монотонной последовательности.
- 7) Переход к пределу в неравенствах, единственность предела последовательности.
- 8) Существование общей точки последовательности вложенных отрезков. Единственность общей точки для стягивающейся последовательности.
- 9) Точные грани числовых множеств: определение, существование и единственность. Другие определения действительных чисел.
- 10) Бесконечно малые последовательности и их свойства. Предел суммы, разности, произведения и частного.

Определение элементарных функций

- 11) Неравенство Бернулли, экспонента и логарифм.
- 12) Тригонометрические функции, их определение и свойства. Неравенства $|\sin t| < |t| < |\operatorname{tg} t|$ при $0 < |t| < \frac{\pi}{2}$.

Частичные пределы, топология на прямой и мощности

- 13) Частичные пределы, верхний и нижний пределы. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Теорема о единственном частичном пределе.
- 14) Топология на множестве действительных чисел. Открытые, замкнутые и компактные множества. Критерий компактности.
- 15) Биекции и мощность множеств. Сравнение мощностей.
- 16) Теоремы о счётности множества \mathbb{Q} рациональных чисел и несчётности множества \mathbb{R} действительных чисел.

Непрерывные функции и их свойства

- 17) Непрерывность функции в точке. Определение по Коши и по Гейне.
- 18) Непрерывность суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций.
- 19) Теорема о непрерывности композиции функций.
- 20) Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.
- 21) Непрерывность монотонного отображения промежутка на промежуток. Непрерывность обратной функции.
- 22) Топологическое определение непрерывности функции и его эквивалентность другим определениям.

23) Свойства функций, непрерывных на компактных множествах.

Пределы функций

24) Два определения предела функции (по Коши и по Гейне). Их эквивалентность.

25) Свойства пределов функций, связанные с неравенствами и арифметическими операциями.

26) Односторонние пределы. Теорема об односторонних пределах монотонных функций.

27) Критерий Коши существования предела функции.

28) Сравнение асимптотического поведения функций. Порядок функции, асимптотическая эквивалентность, символы o и O .

Производная и её свойства

29) Определение и геометрический смысл производной. Производные функций $\sin x$, $\cos x$, a^x , $\log_a x$.

30) Линейное приближение и дифференциал функции. Непрерывность дифференцируемой функции.

31) Производная суммы, разности, произведения и частного.

32) Производная композиции функций. Производная функции x^α .

33) Производная обратимой функции. Производные обратных тригонометрических функций.

Исследование функций с помощью производной

34) Локальные экстремумы. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля.

35) Теоремы Лагранжа и Коши о среднем значении.

36) Условия постоянства, возрастания и убывания дифференцируемой функции.

37) Достаточные условия экстремума дифференцируемой функции.

38) Достаточное условие выпуклости дифференцируемой функции.

39) Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей вида $0/0$.

40) Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей вида ∞/∞ .

Производные высших порядков

41) Формула Лейбница для n -й производной произведения двух функций.

42) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

43) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

44) Разложения по формуле Тейлора элементарных функций: e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

Метрические пространства, их подмножества и топология

45) Метрические пространства, пределы последовательностей точек и полнота.

46) Евклидовы n -мерные пространства. Неравенства Коши–Буняковского–Шварца и треугольника, полнота евклидова пространства.

47) Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах и их свойства.

48) Внутренность, замыкание и граница подмножества метрического пространства. Открытость внутренности, замкнутость замыкания и границы.

49) Индуцированная метрика и топология на подмножествах метрического пространства, относительно замкнутые и открытые множества.

50) Связные множества в метрических пространствах. Описание связных подмножеств числовой прямой.

51) Компактные множества в метрическом пространстве и критерий компактности в евклидовом пространстве.

52) Компактность и секвенциальная компактность в метрических пространствах.

Непрерывные отображения метрических пространств

- 53) Непрерывные отображения метрических пространств. Определение непрерывности в точке по Коши и по Гейне. Топологическое определение непрерывности на множестве.
- 54) Свойства непрерывных отображений, определённых на компакте и на связных множествах.
- 55) Расстояние между точкой и множеством и между двумя множествами в метрическом пространстве. Достаточное условие достижимости расстояния между множествами в евклидовом пространстве.
- 56) Кривые в метрическом пространстве и их конкатенация. Линейная связность метрического пространства, её сравнение со связностью и сохранение линейной связности при непрерывных отображениях.
- 57) Равномерно непрерывные отображения метрических пространств, модуль непрерывности. Теорема о равномерной непрерывности отображения на компакте.
- 58) Полунепрерывные функции, достаточные условия достижимости минимума на компакте. Колебание функции в точке и его полунепрерывность.

Длина кривой в метрическом пространстве

- 59) Определение и свойство аддитивности длины дуги кривой.
- 60) Спряжяемые кривые. Непрерывная зависимость длины дуги кривой от параметра, натуральная параметризация кривой.
- 61) Спряжяемость непрерывно дифференцируемой кривой в евклидовом пространстве. Производная длины дуги по параметру.
- 62) Кривизна и формулы Френе для кривой на евклидовой плоскости. Радиус кривизны, центр кривизны и эволюта.
- 63) Кривизна, главная нормаль и бинормаль кривой в \mathbb{R}^3 . Кручение и формулы Френе для кривой ненулевой кривизны.

Многочлены с комплексными коэффициентами

- 64) Теорема о существовании комплексного корня многочлена с комплексными коэффициентами. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители.
- 65) Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя многочленов. Разложение рациональной функции на элементарные дроби.

Абсолютно сходящиеся числовые ряды

- 1) Абсолютно сходящиеся ряды и их свойства. Перестановка членов абсолютно сходящихся рядов.
- 2) Повторное суммирование и теорема о перемножении абсолютно сходящихся рядов.
- 3) Сравнение абсолютно сходящихся рядов. Сумма геометрической прогрессии.

Равномерная сходимоть функциональных последовательностей и рядов

- 4) Равномерно сходящиеся функциональные последовательности и ряды. Критерий Коши равномерной сходимости.
- 5) Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
- 6) Теорема о непрерывности предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.
- 7) Теорема о производной предела последовательности дифференцируемых функций. Почленное дифференцирование функциональных рядов.

Степенные ряды

- 8) Степенные ряды, их радиус сходимости. Равномерная сходимоть степенных рядов в круге.
- 9) Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.
- 10) Производные и первообразные степенных рядов в круге сходимости.
- 11) Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Разложение функций e^x , $\sin x$, $\cos x$ в степенные ряды.
- 12) Разложение функций $\ln(1+x)$, $\arctg x$ в степенные ряды.
- 13) Разложение функции $(1+x)^\alpha$ в степенной ряд.

Условная сходимоть числовых и функциональных рядов

- 14) Преобразование Абеля. Сходимоть степенного ряда на конце интервала сходимости.
- 15) Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.
- 16) * Перестановка слагаемых в условно сходящемся числовом ряде.

Интеграл Римана на отрезке

- 17) Разбиения отрезка, суммы Дарбу и интеграл Римана. Ступенчатые функции на отрезке, линейность и монотонность интеграла от ступенчатой функции.
- 18) Свойства интеграла Римана на отрезке: линейность, аддитивность, монотонность.
- 19) Интегрируемость по Риману модуля и произведения интегрируемых функций.
- 20) Суммы Римана интегрируемых функций и мелкость разбиений.
- 21) Интегрируемость по Риману непрерывной на отрезке функции.
- 22) Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу и существование первообразной у непрерывной функции.
- 23) Интегрируемость по Риману монотонной функции.
- 24) Формула Ньютона–Лейбница для интеграла Римана на отрезке.
- 25) Интегрирование по частям и замена переменных в интеграле Римана. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
- 26) Иррациональность числа e . * Доказательство иррациональности числа π по Нивену–Бурбаки.

Мера Лебега и её свойства

- 27) Мера элементарных множеств в евклидовом пространстве, корректность её определения и аддитивность.
- 28) Внешняя мера Лебега для подмножеств \mathbb{R}^n . Счётная субаддитивность внешней меры Лебега и её значение для элементарных множеств.

- 29) Расстояние между множествами в смысле внешней меры Лебега. Множества конечной меры Лебега и теоретико-множественные операции с ними.
- 30) Счётная аддитивность меры Лебега для множеств конечной меры.
- 31) Множества с возможно бесконечной мерой Лебега, операции с ними и счётная аддитивность меры Лебега в общем случае.
- 32) Счётные объединения и пересечения измеримых по Лебегу множеств.
- 33) Свойства непрерывности и регулярности меры Лебега.
- 34) * Пример неизмеримого по Лебегу множества.
- 35) Измеримые по Лебегу функции и их свойства. Измеримость поточечного предела измеримых функций.
- 36) Борелевские множества, борелевские функции и их свойства.

Интеграл Лебега и его свойства

- 37) Счётно-ступенчатые функции и интеграл Лебега для них.
- 38) Приближение измеримой функции ступенчатыми и интеграл Лебега для измеримой функции.
- 39) Существование возможно бесконечного интеграла Лебега для неотрицательной измеримой функции.
- 40) Абсолютная интегрируемость интегрируемой по Лебегу функции и её разложение на неотрицательную и неположительную часть.
- 41) Линейность и монотонность интеграла Лебега.

Предельный переход в интеграле Лебега

- 42) Понятие приближения функции в среднем. Приближение интегрируемой функции в среднем ограниченной функцией.
- 43) Приближение в среднем интегрируемой функции функцией с конечным числом элементарных ступенек.
- 44) Счётная аддитивность интеграла Лебега по множествам интегрирования.
- 45) Непрерывность интеграла Лебега по множествам интегрирования и непрерывность интеграла Лебега по отрезку с переменным верхним пределом.
- 46) Теорема о монотонной сходимости. Перестановка счётного суммирования и интегрирования.
- 47) Теорема об ограниченной сходимости.
- 48) * Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

Несобственные интегралы функции одной переменной

- 49) Вторая теорема о среднем для интеграла произведения функций по отрезку.
- 50) Несобственные интегралы. Связь сходимости несобственного интеграла с существованием интеграла Лебега. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла.
- 51) Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов.
- 52) Интегральный признак сходимости ряда неотрицательных чисел.

Повторное интегрирование и линейная замена переменных в интеграле Лебега

- 53) Представление неотрицательной измеримой функции в виде суммы счётного числа ступенек.
- 54) Мера декартова произведения измеримых множеств.
- 55) Теорема Фубини для борелевских функций.
- 56) Теорема Фубини для измеримых функций.
- 57) Мера подграфика неотрицательной функции и представление интеграла неотрицательной функции через интегрирование по области значений.
- 58) Линейная замена переменных в интеграле Лебега.

Применения интеграла Лебега

- 59) Интегралы, зависящие от параметра. Достаточные условия возможности переставить интегрирование и дифференцирование по параметру.
- 60) Интегральная теорема о среднем для непрерывной на связном множестве функции.
- 61) Вычисление интеграла Пуассона и объёма единичного шара в \mathbb{R}^n .
- 62) Гамма-функция, формула понижения и её значения при целых и полуцелых значениях аргумента.
- 63) Бета-функция и её выражение через гамма-функцию.
- 64) Асимптотическая формула Стирлинга для гамма-функции.

*** Дифференцируемость почти всюду**

- 65) * Лемма Безикевича о покрытии отрезками на прямой.
- 66) * Теорема о плотности измеримого множества на прямой.
- 67) * Усреднение интегрируемой по Лебегу на прямой функции, дифференцируемость почти всюду интеграла с переменным верхним пределом.
- 68) * Существование производной почти всюду и формула Ньютона–Лейбница для липшицевой функции одной переменной.

Дифференцирование функций нескольких переменных

- 69) Дифференцируемые функции нескольких переменных. Частные производные.
- 70) Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных в точке.
- 71) Производные и дифференциалы функции нескольких переменных высших порядков. Теорема о независимости смешанной производной от порядка дифференцирования.
- 72) Формула Тейлора для функций нескольких переменных.

Свёртка и приближение функций бесконечно гладкими

- 1) Свёртка функций и её ассоциативность. Дифференцирование свёртки.
- 2) Бесконечно гладкие функции с компактным носителем, примеры.
- 3) Приближение функции в \mathbb{R}^n (вместе с производными) бесконечно гладкими функциями.

Дифференцируемые отображения и криволинейные системы координат

- 4) Дифференцируемые отображения и производная композиции отображений.
- 5) Теорема о существовании обратного отображения. Локальные системы криволинейных координат.
- 6) Теорема о системе неявных функций, определяемых системой уравнений (случай гладких уравнений).
- 7) Теорема о расщеплении гладкого отображения на простые гладкие отображения.

Дифференциал, гессиан и исследование функции на экстремум

- 8) Дифференциал функции как линейный функционал. Корректность определения второго дифференциала (гессиана) функции как квадратичной формы на касательных векторах для случая, когда первый дифференциал функции равен нулю.
- 9) Локальные максимумы и минимумы функций многих переменных. Необходимое условие экстремума непрерывно дифференцируемой функции.
- 10) Необходимые и достаточные условия экстремума дважды непрерывно дифференцируемых функций.
- 11) Условные экстремумы. Необходимое условие условного экстремума в терминах первых производных. Метод множителей Лагранжа.
- 12) Необходимые и достаточные условия условного экстремума с использованием вторых производных.

Векторы и дифференциальные формы первой степени

- 13) Касательные векторы к открытому подмножеству \mathbb{R}^n в точке. Определение через дифференцирование функций в точке и явный вид.
- 14) Касательное пространство в точке и дифференциал отображения как отображение касательных пространств. Векторные поля на открытых областях в \mathbb{R}^n .
- 15) Дифференциальные формы первой степени и дифференциалы функций. Замена координат в дифференциальной форме первой степени.

Дифференциальные формы высших степеней

- 16) Дифференциальные формы произвольной степени на открытых множествах в \mathbb{R}^n , их определение и свойства.
- 17) Внешнее умножение дифференциальных форм, нормировка внешнего умножения и координатная запись дифференциальных форм произвольной степени.
- 18) Оператор внешнего дифференцирования d , его аксиоматические свойства, существование, единственность и независимость от выбора криволинейной системы координат в области в \mathbb{R}^n .
- 19) Замена координат в дифференциальной форме и обратный образ дифференциальной формы при гладких отображениях, якобиан замены переменных с точки зрения дифференциальных форм.

Интегрирование дифференциальных форм

- 20) Интегрирование дифференциальной формы n -й степени с компактным носителем по \mathbb{R}^n . Равенство нулю интеграла дифференциала формы с компактным носителем.
- 21) Представление формы n -й степени с компактным носителем в \mathbb{R}^n в каноническом виде с точностью до дифференциала формы с компактным носителем.
- 22) Гладкое разбиение единицы в окрестности компактного подмножества \mathbb{R}^n , подчинённое покрытию этого подмножества.
- 23) Поведение интеграла от формы с компактным носителем в области \mathbb{R}^n при линейной замене координат.
- 24) Поведение интеграла от формы с компактным носителем в области \mathbb{R}^n при гладкой замене координат.
- 25) Формула гладкой замены переменных в интеграле Лебега от функции в \mathbb{R}^n .

Многообразия (с краем) и формула Стокса

- 26) Вложенные многообразия в \mathbb{R}^N и вложенные многообразия с краем. Достаточные условия, когда система уравнений задаёт многообразие.
- 27) * Абстрактное определение гладкого многообразия. Координатные карты, гладкие функции на многообразии и гладкие отображения между многообразиями.
- 28) Дифференциальные формы, векторные поля и оператор d на многообразии.
- 29) Гладкие отображения между многообразиями и параметрически заданные многообразия в \mathbb{R}^N .
- 30) Гладкое разбиение единицы в окрестности компактного подмножества многообразия, подчинённое покрытию этого подмножества.
- 31) * Гладкое локально конечное разбиение единицы всего многообразия, подчинённое его покрытию.
- 32) Ориентируемость многообразия в терминах карт, задание ориентации многообразия дифференциальной формой высшей степени. Связь ориентации многообразия и его края.
- 33) Определение интеграла дифференциальной формы по ориентированному многообразию с помощью разбиения единицы и его независимость от разбиения единицы.
- 34) Общая формула Стокса.
- 35) Явный вид частных случаев формулы Стокса в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 . Кусочно-гладкие ориентированные поверхности.
- 36) Независимость интеграла дифференциальной формы по кривой на многообразии от пути интегрирования и существование потенциала дифференциальной формы. Необходимое условие существования потенциала.

Элементы дифференциальной топологии

- 37) Замкнутые и точные дифференциальные формы, оператор цепной гомотопии для обратных образов дифференциальных форм.
- 38) Определение когомологий де Рама с произвольным и компактным носителем. Когомологии де Рама \mathbb{R}^n и выпуклых областей в \mathbb{R}^n .
- 39) * Когомологии де Рама с компактным носителем в степени n для n -мерного связного многообразия.
- 40) * Критические и регулярные значения гладкого отображения, теорема Сарда.
- 41) * Геометрическое определение степени собственного отображения и его корректность.
- 42) * Определение степени отображения между ориентированными многообразиями с помощью интегрирования форм максимальной степени с компактным носителем.
- 43) Теорема Брауэра о неподвижной точке.
- 44) * Существование нигде не нулевых векторных полей на сфере.

Дифференцирование и интегрирование векторных полей

- 45) Внутреннее дифференцирование и производная Ли дифференциальной формы по векторному полю.
- 46) Производная Ли векторного поля и её свойства. Скобка Ли векторных полей, формула для её вычисления в координатах, её кососимметричность и тождество Якоби.
- 47) Интегрирование векторных полей как решение дифференциального уравнения первого порядка. Выпрямление траекторий и достаточные условия неограниченного продолжения решения дифференциального уравнения на многообразии.
- 48) Однопараметрические группы диффеоморфизмов многообразия, геометрический смысл производной Ли по векторному полю.
- 49) Дивергенция векторного поля на многообразии с формой объёма, её геометрический смысл.

Римановы и полуримановы многообразия

- 50) Риманова структура на многообразии, её существование.
 - 51) Риманов объём, произведение римановых многообразий и риманов объём на произведении.
 - 52) Риманов объём многообразий в евклидовом пространстве с индуцированной римановой структурой. Формула риманова объёма двумерной поверхности в \mathbb{R}^3 с векторным произведением.
 - 53) Скалярное произведение на произвольных тензорах и определение оператора $*$ для дифференциальных форм.
 - 54) Выражение оператора $*$ в евклидовом пространстве для ортонормированных и сферических координат. Выражение дивергенции, градиента и ротора в \mathbb{R}^3 через оператор $*$, выражение лапласиана в сферических координатах.
 - 55) Ковариантное дифференцирование, его аксиоматические свойства. Формула Козюля и существование ковариантного дифференцирования.
 - 56) Длина кривой на римановом многообразии и действие кривой. Определение метрики на римановом многообразии.
 - 57) Геодезические и их уравнение. Перенос вектора вдоль кривой с помощью ковариантного дифференцирования.
 - 58) $*$ Тензор кривизны Римана, его свойства симметрии и геометрический смысл. Тензор Риччи и скалярная кривизна.
 - 59) Пространство-время специальной теории относительности, его геодезические и изометрии.
 - 60) Движение в электромагнитном поле, дифференциальная форма электромагнитного поля, инвариантный вид уравнений Максвелла.
 - 61) Риманова структура на сфере, её геодезические, изометрии и кривизна.
 - 62) Риманова структура в гиперболическом пространстве, его геодезические, изометрии и кривизна.
 - 63) Полуриманова структура в пространстве де Ситтера и анти-пространстве де Ситтера, описание световых лучей.
 - 64) Метрика Шварцшильда и описание радиальных световых лучей в ней.
- ### **Площадь поверхности по Минковскому и изопериметрическое неравенство**
- 65) $*$ Площадь поверхности по Минковскому для гиперповерхностей, её равенство риманову объёму.
 - 66) $*$ Риманов объём n -мерной сферы.
 - 67) $*$ Неравенство Брунна–Минковского, логарифмическое и функциональное неравенство Брунна–Минковского.
 - 68) $*$ Изопериметрическое неравенство для площади поверхности Минковского.

Приближение функций равномерно, в среднем и среднеквадратичном

- 1) Равномерное приближение непрерывной функции на отрезке кусочно-линейными функциями и приближение кусочно-линейных функций многочленами.
- 2) Приближение непрерывных 2π -периодических функций тригонометрическими многочленами.
- 3) * Алгебры непрерывных на компактах функций. Теорема Стоуна–Вейерштрасса.
- 4) Пространства L_p . Неравенства Гёльдера и Минковского.
- 5) Полнота пространства L_p .
- 6) Приближение функций в L_p ступенчатыми и бесконечно гладкими.

Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция

- 7) Функции ограниченной вариации, представление функции ограниченной вариации в виде суммы монотонных и ограниченных.
- 8) Абсолютно непрерывные функции, абсолютная непрерывность интеграла с переменным верхним пределом.
- 9) Представление абсолютно непрерывной функции в виде суммы монотонных абсолютно непрерывных функций.
- 10) Существование производной почти всюду у абсолютно непрерывной функции и обобщённая формула Ньютона–Лейбница.
- 11) Абсолютная непрерывность произведения абсолютно непрерывных функций и обобщённое интегрирование по частям.
- 12) Теорема Римана об осцилляции и равномерной осцилляции.
- 13) Порядок убывания коэффициентов Фурье абсолютно непрерывных и несколько раз обобщённо дифференцируемых функций.
- 14) Порядок убывания коэффициентов Фурье функций ограниченной вариации.

Ряд Фурье в пространстве L_2

- 15) Скалярное произведение в пространстве L_2 , неравенство Коши–Буняковского.
- 16) Неравенство Бесселя и свойство минимальности коэффициентов Фурье по ортогональной системе функций в L_2 .
- 17) Полные системы в пространстве L_2 . Полнота тригонометрической системы в $L_2[-\pi, \pi]$.
- 18) Равенство Парсеваля для коэффициентов Фурье функций из $L_2[-\pi, \pi]$ по ортогональным системам.

Тригонометрический ряд Фурье и его сходимость

- 19) Интегральное представление частичных сумм тригонометрического ряда Фурье, ядро Дирихле.
- 20) Принцип локализации для рядов Фурье и равномерный принцип локализации.
- 21) Признак Липшица равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке.
- 22) Признак Дирихле равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке.
- 23) Признаки Липшица, Дирихле и Дини сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.
- 24) Почленное дифференцирование и интегрирование тригонометрических рядов Фурье.
- 25) Теорема Фейера о суммировании тригонометрического ряда Фурье методом средних арифметических.
- 26) Представление котангенса и косеканса в виде бесконечной суммы элементарных дробей. Формула дополнения для бета-функции.

Интеграл Фурье и преобразование Фурье

- 27) Вычисление интеграла Дирихле с помощью дифференцирования по параметру.
- 28) Представление функций интегралом Фурье, свёртка с ядром Дирихле для интеграла Фурье.
- 29) Принцип локализации для интеграла Фурье.
- 30) Признаки Дини, Липшица и Дирихле сходимости интеграла Фурье для абсолютно интегрируемой функции.
- 31) Преобразование Фурье. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
- 32) Пространство \mathcal{S} , его инвариантность при преобразовании Фурье и непрерывность преобразования Фурье как отображения $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$.
- 33) Унитарность преобразования Фурье относительно стандартного скалярного произведения в пространстве \mathcal{S} .
- 34) Продолжение преобразования Фурье на пространство L_2 .
- 35) Явление Гиббса для представления $\operatorname{sgn} x$ интегралом Фурье.
- 36) Преобразование Фурье функций нескольких переменных. Преобразование Фурье гауссовой плотности.
- 37) Формула обращения преобразования Фурье функции нескольких переменных с абсолютно интегрируемым преобразованием Фурье.
- 38) Формула обращения преобразования Фурье функции нескольких переменных с достаточным количеством непрерывных частных производных.
- 39) Свёртка функций из L_1 и преобразование Фурье.

Банаховы пространства

- 40) Нормированные векторные пространства и банаховы пространства. Полнота пространства $C[a, b]$.
- 41) Теорема Бэра в банаховом пространстве.
- 42) Двойственное к банахову пространству, эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного функционала.
- 43) Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха–Штейнгауза) для семейств непрерывных линейных функционалов в банаховых пространствах.
- 44) Расходимость рядов Фурье непрерывных 2π -периодических функций и норма свёртки с ядром Дирихле.
- 45) * Явный пример непрерывной 2π -периодической функции, ряд Фурье которой расходится в одной точке.
- 46) Непрерывные линейные отображения между банаховыми пространствами, их норма, эквивалентность ограниченности и непрерывности.
- 47) Факторпространство банахового пространства по замкнутому линейному подпространству. Его полнота и норма проекции на факторпространство.
- 48) Теорема об изоморфизме для непрерывных линейных отображений банаховых пространств.
- 49) ε -сети в метрических пространствах, эквивалентность предкомпактности и вполне ограниченности подмножества полного метрического пространства.
- 50) Теорема Арцела–Асколи о предкомпактных подмножествах в пространстве непрерывных на метрическом компакте функций.

Гильбертовы пространства

- 51) Гильбертовы пространства над действительными и комплексными числами. Неравенство Коши–Буняковского.
- 52) Полнота и замкнутость ортонормированной системы в гильбертовом пространстве, ряд Фурье по ней, неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.

- 53) Изометрии гильбертовых пространств и описание с точностью до изометрии гильбертовых пространств, имеющих счётную полную систему.
- 54) Метрическая проекция на замкнутое аффинное подпространство гильбертового пространства.
- 55) Описание двойственного к гильбертову пространству.
* **Лемма Цорна и двойственные пространства банаховых пространств**
- 56) * Теорема Цермело и лемма Цорна.
- 57) * Теорема Хана–Банаха. Вложение банахова пространства во второе двойственное.
- 58) * Теорема Тихонова о произведении компактов.
- 59) *-слабая топология двойственного к банахову пространству, компактность в *-слабой топологии.
- 60) * Теорема Хана о разложении меры со знаком.
- 61) * Теорема Радона–Никодима о плотности абсолютно непрерывной (относительно меры Лебега) меры.
- 62) * Теорема Рисса о двойственном пространстве к $C[a, b]$.
Распределения (обобщённые функции)
- 63) Пространство \mathcal{E} и топология в нём, его полнота.
- 64) Связь непрерывности и ограниченности линейного отображения $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$. Пространство \mathcal{E}' распределений с компактным носителем.
- 65) Описание элементов \mathcal{E}' через интегрирование производных по отрезку.
- 66) Пространство \mathcal{D} и определение сходимости в нём.
- 67) Пространство \mathcal{D}' распределений (обобщённых функций). Регулярные и нерегулярные распределения, дельта-функция.
- 68) Топология и сходимость в пространстве \mathcal{D}' , сходимость последовательности регулярных функций к дельта-функции.
- 69) Дифференцирование распределений, корректность его определения и непрерывность дифференцирования как операции $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$.
- 70) Умножение распределения в \mathcal{D}' на бесконечно гладкие функции, корректность его определения и непрерывность как операции $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$.
- 71) Равенство нулю распределения на открытом множестве, носитель распределения из \mathcal{D}' .
- 72) Пространство \mathcal{S}' обобщённых функций, преобразование Фурье обобщённых функций из \mathcal{S}' , преобразование Фурье дельта-функции.
- 73) * Распределения на многообразиях, бескоординатное определение, сужение распределения на открытое множество.