Арсений Акопян, Илья Богданов, Роман Карасёв, Аркадий Скопенков,
Борис Трушин, Григорий Челноков

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

Решения задач

02 декабря 2012 года

Долгопрудный, МФТИ
2012

1 курс

1. Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, причём $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Обязательно ли найдётся $\xi \in [0,1]$ такое, что $f(\xi) f'(\xi)^2 \geq 4/9$?

   Ответ: да.

   Решение. Пусть $x_0 = \max\{x \in [0,1] : f(x) = 0\}$. Тогда функция $g(x) = f(x)^{3/2}$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[x_0, 1]$, а также дифференцируема на интервале $(x_0, 1)$. Применяя к ней теорему Лагранжа, находим такое ξ, что

   $$g'(\xi) \geq \frac{g(1) - g(x_0)}{1 - x_0} = \frac{1}{1 - x_0} \geq 1.$$

   Итак, $1 \leq g'(\xi) = \frac{3}{2} f(\xi)^{1/2} f'(\xi)$, откуда $f(\xi) f'(\xi)^2 \geq 4/9$.

   Замечание 1. Оценка точна для функции $f(x) = x^{2/3}$. Её можно чуть исправить в окрестности нуля так, чтобы она была дифференцируема в нуле.

   Замечание 2. Можно в условии неравенство заменить на $f(\xi) f'(\xi)^3 \geq 27/64$. Тогда будет менее очевидно, что надо ограничиваться отрезком $[x_0, 1]$. Это делать всё равно надо, ибо иначе функция $g(x)$ может не быть дифференцируемой в точке x_0.

2. Некоторые подмножества вещественной прямой объявлены *хорошими*. Известно, что все лучи $(-\infty, a)$, где a — рациональное число, хорошие. Также известно, что разность двух хороших множеств и объединение любого семейства хороших множеств всегда является хорошим. Правда ли, что любое множество на прямой является хорошим?

   Ответ: да.

   Решение. Достаточно доказать, что каждое одноточечное множество является хорошим, тогда с помощью объединения мы получим любое множество. По условию задачи, множество

   $$(-\infty, a) = \bigcup_{b < a, b \in \mathbb{Q}} (-\infty, b)$$

   хорошее для любого $b \in \mathbb{R}$, вся прямая

   $$(-\infty, +\infty) = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} (-\infty, a)$$

   — хорошее множество, множество

   $$[a, +\infty) = (-\infty, +\infty) \setminus (-\infty, a)$$

   является хорошим для любого $a \in \mathbb{R}$, множество

   $$(a, +\infty) = \bigcup_{b > a} [b, +\infty)$$

   тоже хорошее для любого $a \in \mathbb{R}$. Тогда

   $$\{a\} = [a, +\infty) \setminus (a, +\infty)$$

   хорошее.

3. В пространстве $\mathbb{R}^n$ отмечены все 2^n точек, все координаты которых — нули или единицы. Затем некоторые пары этих точек соединены единичными отрезками так, что от любой точки до любой другой существует единственный путь по этим отрезкам. Докажите, что один из таких путей имеет длину, не меньшую $2n-1$.

   Решение. Обозначим через G граф с вершинами в отмеченных точках, рёбрами которого являются единичные отрезки между парами точек. Заметим, что пара точек соединена в этом графе тогда и только тогда, когда их координаты отличаются ровно в одной позиции. Под словом *расстояние* будем понимать расстояние в графе G.

   Обозначим через $T \subset G$ граф из условия. Это некоторое *остовное дерево* графа G. Предположим противное: в T максимальный путь AB имеет длину не более $2n-2$. Возьмём точку O в середине пути AB или одну из двух средних точек этого пути. Ясно, что расстояния $\operatorname{dist}(A,O), \operatorname{dist}(B,O) \le n-1$. Покажем, что для любой точки $X \in V(G)$ расстояние $\operatorname{dist}(X,O) \le n-1$. Действительно, пусть единственный простой путь в T из X в O приходит на путь AOB в точке X'. Тогда $XX'O$ и есть этот кратчайший путь. Без ограничения общности предположим, что X' лежит на пути AO. Если длина пути XO не менее n, то простой путь $XX'OB$ в T оказывается длиннее, чем $AX'OB$, так как $XX'O$ длиннее чем $AX'O$. Но это противоречит выбору пути AB в T как самого длинного.

   Итак, всякая точка в T, а значит и в G, находится на расстоянии не более $n-1$ от O. Но если в координатах O поменять все нули на единицы и наоборот, то получится точка $\bar{O}$, для которой очевидно $\operatorname{dist}(O,\bar{O}) = n$. Получено противоречие.

4. Докажите, что если многочлен с рациональными коэффициентами имеет корень $1+\cos(2\pi/9)+\cos^2(2\pi/9)$, то он имеет также корень $1+\cos(8\pi/9)+\cos^2(8\pi/9)$.

   Решение 1. Пусть $w = e^{2\pi i/9}$ — примитивный корень 9-й степени из единицы. Известно, что его минимальный многочлен — это многочлен деления круга $\Phi_9(x)$ с корнями w^i при $i = 1,2,4,5,7,8$. Также известно, что $\Phi_9(x)$ неприводим (это также можно доказать, используя критерий Эйзенштейна для $P(t) = \Phi_9(1+t)$), а значит, его группа Галуа G транзитивно переставляет его корни. Следовательно, найдётся $g \in G$ такой, что $gw = w^4$. Тогда

$$g(1+\cos(2\pi/9)+\cos^2(2\pi/9)) = g\left(1+\frac{w+w^{-1}}{2}+\frac{(w+w^{-1})^2}{4}\right) =$$
$$= 1+\frac{w^4+w^{-4}}{2}+\frac{(w^4+w^{-4})^2}{4} = 1+\cos(8\pi/9)+\cos^2(8\pi/9).$$

   Это означает, что указанные два числа могут быть корнями многочлена только оба вместе.

   Решение 2. Приведём также решение, основанное исключительно на школьной программе. Обозначим через $g(x)$ данный многочлен с корнем $1+\cos(2\pi/9)+$

$\cos^2(2\pi/9)$. По формуле косинуса тройного угла число $\cos(2\pi/9)$ является корнем многочлена $8x^3-6x+1$. Значит, $\cos(2\pi/9)$ является корнем остатка $r(x)$ от деления многочлена $g(1+x+x^2)$ на $8x^3-6x+1$. Поэтому $\cos(2\pi/9)$ является корнем остатка от деления многочлена $8x^3-6x+1$ на $r(x)$.

По теореме о рациональных корнях уравнение $y^3-3y+1=0$ не имеет рациональных корней (ибо числа $y=\pm 1$ не подходят). Значит, уравнение $8x^3-6x+1=0$ $(2x=y)$ тоже не имеет рациональных корней. Поэтому $r(x)\equiv 0$. То есть $g(1+x+x^2)$ делится на $8x^3-6x+1$.

Так как число $\cos(8\pi/9)$ также является корнем многочлена $8x^3-6x+1$ по формуле косинуса тройного угла, то оно является и корнем многочлена $g(1+x+x^2)$.

5. Трёхмерный выпуклый многогранник комбинаторно эквивалентен правильному октаэдру, то есть имеет 8 вершин, из каждой выходит по 4 ребра, и грани являются треугольниками. Его грани раскрашены в чёрный и белый цвета так, что соседние по ребру грани разноцветны. Оказалось, что при каждой вершине сумма чёрных углов равна сумме белых. Докажите, что сумма площадей чёрных граней равна сумме площадей белых.

   Решение. Докажем, что в многогранник P можно вписать сферу. Во-первых, в выпуклый четырёхгранный угол можно вписать сферу тогда и только тогда, когда суммы противоположных углов равны, это доказывается так же, как школьный критерий вписываемости окружности в четырёхугольник. Значит, в каждый угол P можно вписать сферу.

   Пусть P имеет «верхний полюс» N, «южный полюс» S, и четыре точки $ABCD$ на экваторе. В угол N можно вписать сферу σ и её ещё можно гомотетировать относительно N. Тогда мы можем добиться, чтобы σ касалась ещё одной нижней грани, без ограничения общности SAB. Тогда эта сфера касается трёх из четырёх граней углов A и B, следовательно она вписана и в эти углы. Значит, она касается всех граней P, кроме, может быть SCD. Но и SCD она тоже должна касаться, так как SCD является четвёртой гранью в угле, например, S, трёх остальных граней которого σ уже касается.

   Теперь каждую грань F многогранника P мы разрезаем на три треугольника с помощью точки касания $P\cap\sigma$ и отрезков из этой точки к вершинам F. Для каждого такого треугольника на чёрной грани есть равный ему треугольник на белой грани, по теореме о равенстве касательных к сфере из одной точки. Значит суммы площадей чёрных и белых граней равны.

2–6 курс

1. Некоторые подмножества вещественной прямой объявлены *хорошими*. Известно, что все лучи $(-\infty, a)$, где a — рациональное число, хорошие. Также известно, что разность двух хороших множеств и объединение любого семейства хороших множеств всегда является хорошим. Правда ли, что любое множество на прямой является хорошим?

   См. решение Задачи 2 для первого курса.

2. В евклидовом пространстве E даны два подпространства U и V. Оператор $A: U \to U$ действует так: всякий вектор $x \in U$ сначала ортогонально проецируется на V, а потом полученный вектор ортогонально проецируется на U. Докажите, что A самосопряжён.

   Решение. Пусть $P_U : E \to E$ и $P_V : E \to E$ — операторы ортогональных проекций на U и V соответственно. Тогда оператор $\widetilde{A} = P_U P_V P_U$, очевидно, самосопряжён. Остаётся заметить, что A является сужением $\widetilde{A}$ на инвариантное относительно $\widetilde{A}$ подпространство U.

3. В пространстве $\mathbb{R}^n$ отмечены все 2^n точек, все координаты которых — нули или единицы. Затем некоторые пары этих точек соединены единичными отрезками так, что от любой точки до любой другой существует единственный путь по этим отрезкам. Докажите, что один из таких путей имеет длину, не меньшую $2n - 1$.

   См. решение Задачи 3 для первого курса.

4. Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый шар радиуса 1 с центром в нуле, а B' — шар большего радиуса с тем же центром. Функция $f : B' \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, и для любого $x \in B$ выполняется неравенство $|\nabla f(x)| \geq 1$. Докажите, что
$$\max_{x \in B} f(x) - \min_{x \in B} f(x) \geq 2.$$

   Решение. Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение:
$$\dot{x} = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}.$$

   Так как правая его часть непрерывно дифференцируема на шаре B, то решение с начальным условием $x(0) = 0$ существует на некотором промежутке $t \in (-a, b)$. При этом, так как скорость $\dot{x}$ по модулю равна единице и для достижения границы шара требуется время не менее 1, то из теоремы о продолжении решений следует, что $a, b \geq 1$. Далее посчитаем
$$\frac{d(f(x))}{dt} = (\nabla f(x), \dot{x}) = |\nabla x| \geq 1,$$

   следовательно $f(x(t))$ меняется при $t \in (-a, b)$ как минимум на $b + a \geq 2$.

5. Пусть X — конечное подмножество решётки $\mathbb{Z}^2$, состоящее из более чем одной точки. Предположим, что сдвигами X на целочисленные векторы можно без пересечений (в один слой) покрыть $\mathbb{Z}^2$. Докажите, что функция $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$

$$P(x,y) = \sum_{(n,m)\in X} e^{inx+imy}$$

обращается в нуль в некоторой точке $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Решение 1. Нам понадобится:

Лемма. Пусть многочлен Фурье $P(x,y)$ не имеет корней. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен Фурье $Q(x,y)$, такой, что сумма модулей коэффициентов многочлена Фурье $Q(x,y)P(x,y) - 1$ не более ε.

Выведем утверждение задачи из Леммы. Предположим противное — пусть целые точки плоскости разбились на множества $X_t = \{X + t\}_{t\in T}$. Пусть без ограничения общности $\mathbf{0} \in X$. Выделим в каждом X_t клетку $t = \mathbf{0} + t$, поставим в неё $n-1$, а в остальные поставим -1 (здесь $n = |X| > 1$). Эту расстановку интерпретируем как ряд Фурье:

$$R(x,y) = \sum_{(n,m)\in T} (n-1)e^{inx+imy} - \sum_{(n,m)\notin T} e^{inx+imy}.$$

Формально это выражение равно $R(x,y) = nT(x,y) - D(x,y)$, где $T(x,y) = \sum_{(n,m)\in T} e^{inx+imy}$ и $D(x,y) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} e^{inx+imy}$.
Тогда формально при условии замощения

$$R(x,y)P(x,y) = nR(x,y)T(x,y) - R(x,y)D(x,y) = nD(x,y) - nD(x,y) = 0.$$

С другой стороны, по Лемме для некоторого многочлена Фурье $Q(x,y)$ выражение $E(x,y) = P(x,y)Q(x,y) - 1$ будет иметь сумму модулей коэффициентов не более ε. Тогда у ряда Фурье

$$E(x,y)R(x,y) = Q(x,y)P(x,y)R(x,y) - R(x,y) = -R(x,y)$$

с одной стороны, каждый коэффициент будет не более $(n-1)\varepsilon$ по модулю, а с другой стороны, оно равно $-R(x,y)$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ получаем противоречие.

Теперь докажем Лемму. Разложим $1/P(x,y)$ (по предположению это гладкая периодическая функция) в ряд Фурье:

$$\frac{1}{P(x,y)} = \sum_{(n,m)} a_{nm} e^{inx+imy}.$$

Тогда $\sum_{(n,m)} |a_{nm}|^2 < +\infty$ по равенству Парсеваля. Пусть N — максимальный разброс степеней многочлена P. Обозначим $Q_k(x,y) = \sum_{|n|,|m|\le kN} a_{nm}e^{inx+imy}$. Тогда сумма модулей коэффициентов многочлена $1 - Q_k(x,y)P(x,y)$ оценивается через

$$\sum_{kN<\max\{|n|,|m|\}\le(k+1)N} |a_{nm}|.$$

С другой стороны, такая сумма должна стремиться у нулю при $N \to \infty$, иначе по неравенству Коши–Буняковского было бы

$$\sum_{kN<\max\{|n|,|m|\}\leq(k+1)N} |a_{nm}|^2 \geq \frac{\varepsilon}{CN},$$

что противоречит равенству Парсеваля.

Решение 2. Рассмотрим $P(x,y)$, $T(x,y)$ и $D(x,y)$ как в предыдущем решении. Условие замощения выглядит так:

$$P(x,y)T(x,y) = D(x,y).$$

Оно выполняется не только как формальное тождество между рядами Фурье, но и как равенство для обобщённых функций. Заметим, что

$$D(x,y) = 4\pi^2 \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \delta(x-2\pi n)\delta(y-2\pi m).$$

Предположим противное — функция $P(x,y)$ не имеет нулей. Тогда $Q(x,y) = 1/P(x,y)$ тоже бесконечно гладкая. Следовательно:

$$T(x,y) = Q(x,y)D(x,y).$$

Вспомним, что $D(x,y)$ при умножении на гладкую периодическую функцию даёт $Q(0,0)D(x,y)$. Следовательно, $T(x,y)$ пропорциональна $D(x,y)$, а так как $T(x,y) = \sum_{(n,m)\in T} e^{inx+imy}$ и $D(x,y) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} e^{inx+imy}$, то $T(x,y)$ должна быть равна $D(x,y)$. То есть множество переносов совпадает со всей решёткой $\mathbb{Z}^2$, а X должно состоять из одного элемента — противоречие.