1. IMC 2010. День 1

(1) Докажите неравенство

$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2} \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

(2) Найдите сумму ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-3)(4k-2)(4k-1)(4k)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \dots.$$

(3) Пусть последовательность $\{x_n\}$ определена рекуррентно:

$$x_1 = \sqrt{5}, \quad x_{n+1} = x_n^2 - 2.$$

Найти

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_{n+1}}.$$

(4) Пусть a, b, $n \geq 2$ — целые числа. Докажите, что найдётся бесконечно много целых чисел, не представимых в виде $\{ax^n + by^n\}$ для $x, y \in \mathbb{Z}$.

(5) Пусть $a, b, c \in (-1, 1)$ — вещественные числа и

$$1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Докажите, что для любого натурального n

$$1 + 2a^n b^n c^n \geq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}.$$

2. IMC 2010. День 2

(1) Верно ли, что для любого вещественного x_1 последовательность $\{x_n\}$, заданная рекуррентно $x_{n+1} = f(x_n)$ сходится, если
 а) $f(x) = x\cos x$;
 б) $f(x) = x\sin x$.

(2) Пусть $a_0, \dots, a_n$ — положительные вещественные числа и для любого $k = 1, \dots, n$ выполняется неравенство $a_k \geq a_{k-1} + 1$. Докажите, что

$$1 + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{1}{a_1 - a_0}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n - a_0}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{a_0}\right)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

(3) Пусть конечная группа G действует на конечном множестве X так, что всякий неединичный элемент $g \in G$ имеет на X ровно одну неподвижную точку ($gx = x$). Докажите, что некоторый элемент $x \in X$ является неподвижной точкой всех $g \in G$.

(4) В симметричной матрице A все диагональные элементы — чётные целые числа. Докажите, что для всех натуральных n в матрице A^n не найдётся столбца из одних нечётных чисел.

(5) Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для любого простого p и вещественного x удовлетворяет соотношению

$$\sum_{i=0}^{p-1} f\left(x + \frac{i}{p}\right) = 0.$$

Докажите, что если $f(x)$ обращается в нуль на некотором открытом множестве, то она тождественно равна нулю.