

КУРС «ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ ГЕОМЕТРИИ»

Роман Николаевич Карасёв, r_n_karasev@mail.ru

В 2014–2015 учебном году будет прочитан курс по современному и активно развивающемуся разделу математики, не требующему больших предварительных знаний для выхода на современные исследовательские проблемы.

- (1) Основные понятия и определения выпуклой геометрии. Теорема Хана–Банаха. Полярное выпуклое тело, политопы и полиэдры.
- (2) Простейшие комбинаторно-геометрические результаты. Теоремы Каратеодори, Радона и Хелли.
- (3) Применения теоремы Хелли: неравенство Юнга, теорема о центральной точке, покрытие транслятом выпуклого тела.
- (4) Техника минимизации и её применения. Цветная теорема Каратеодори и цветная теорема Хелли. Теорема Тверберга.
- (5) Разбиение Вороного и триангуляция Делоне. Замощения пространства и гипотеза Вороного о параллелоэдрах. Триангуляция Делоне на плоскости, алгоритмы для её нахождения. Оптимальность триангуляции Делоне на плоскости для некоторых функционалов.
- (6) Триангуляция Делоне как выпуклая оболочка точек, поднятых на параболоид. Последовательность флипов как заполнение этой выпуклой оболочки тетраэдрами. Разбиение Вороного как проекция многогранника, описанного вокруг того же параболоида. Обобщённые разбиения Вороного (регулярные разбиения), простейшие транспортные задачи, понятие о монотонных отображениях.
- (7) «Шелушение» (shellability) многогранников, свойство упорядоченности пересечений с прямыми для разбиения Вороного и триангуляции Делоне. Понятие о симплициальном комплексе и эйлеровой характеристике.
- (8) Объёмы объединения шаров. Использование обобщённых разбиений Вороного для упрощения формулы включений-исключений для объёма объединения шаров по Эдельсбруннеру.
- (9) Теорема Киришбрауна о пересечении шаров и продолжении липшицевых отображений с доказательством по Акопяну. Вывод теоремы Юнга из теоремы Киришбрауна.
- (10) Задача Кнезера–Поулсена об объёме пересечения и объёме объединения шаров. Решение случая задачи с непрерывным движением по Громову и по Чикошу. Сведения случая не более $n+1$ шара в \mathbb{R}^n или \mathbb{S}^n к случаю непрерывного движения.
- (11) Теорема Минковского о площадях граней: доказательство тождества. Триангуляции многогранников и их “circumcenter of mass” по Акопяну.
- (12) Логарифмическая вогнутость и неравенство Прекопы–Ляйндлера. Выпуклость множества дифференциалов выпуклой функции. Теорема Минковского о площадях граней: доказательство существования.
- (13) Гладкие многообразия с краем и кусочно-линейные псевдомногообразия с краем, их ориентация. Общий слой гладкого отображения или кусочно-линейного отображения, понятие о лемме Сарда. Степень гладкого или кусочно-линейного отображения.
- (14) Связь степени отображения и степени его ограничения на край. Степень отображения симплекса в себя, сохраняющего грани. Теорема Кнастера–Куратовского–Мазуркевича и теорема Брауэра о неподвижной точке. Доказательства существования положения равновесия в экономике.

- (15) Теорема Борсука–Улама для нечётных отображений между сферами. Эквивалентные формулировки теоремы Борсука–Улама, теорема о степени нечётного отображения сферы в себя. Формула Крофтона и прообраз нуля при нечётном отображении сферы в евклидово пространство.
- (16) Теорема «о бутерброде» для мер и мер со знаком. Кривая моментов и её обобщения, полиномиальный вариант теоремы о бутерброде. Теорема Ляпунова–Стромквиста–Вудалла.
- (17) Полиномиальное деление одной меры в духе Гута–Каца и его свойства. Сравнение с теоремой Яо–Яо.
- (18) Соединение точек на плоскости графом с небольшим числом пересечений с любой прямой, теорема Шазеля–Вельцля.
- (19) Оценка количества порядковых типов упорядоченных наборов из n точек в \mathbb{R}^d и количества комбинаторно различных многогранников на n вершинах в \mathbb{R}^d .
- (20) Теорема Семереди–Троттера о числе инцидентности точек и прямых. Оценки на множество сумм и множество произведений набора вещественных чисел.
- (21) Теорема Дольникова о пересечениях гиперплоскостями и хроматическое число графа Кнезера. Каноническое расслоение над пространством Грассмана, совпадение его сечений и теорема Дольникова о трансверсали. Теорема о центральной трансверсали.
- (22) Кубатурные формулы и t -дизайны на сфере. Оценка снизу и сверху размера взвешенного t -дизайна. План доказательства Бондаренко–Радченко–Вязовской оценки сверху на размер не взвешенного t -дизайна.
- (23) Теорема Кёбе о реализации плоского графа касающимися окружностями. Набросок доказательства с помощью комплексного анализа: теорема Римана об отображении, униформизация областей в \mathbb{C} в виде областей с круглыми дырками, её существование и единственность по модулю группы Мёбиуса.
- (24) Элементарное доказательство теоремы Кёбе о реализации графа через оптимизацию выпуклой функции, по Колен де Вердьеру. Модификация этого доказательства: дискретно-конформные отображения. Понятие о рёберном описывании многогранников вокруг выпуклого тела по Шрамму.
- (25) Выбор точки, покрытой большим количеством симплексов с независимыми случайными вершинами. Теорема Бороша–Фюреди–Бараня–Паха–Громова и её варианты.
- (26) Обобщения теоремы Борсука–Улама: Существование эквивариантных отображений и классифицирующее пространство для свободных действий конечной группы. Формула Лефшеца для неподвижных точек отображения. Теорема Дольда об эквивариантных отображениях n -связных пространств в n -мерные.
- (27) Применения обобщённых теорем типа Борсука–Улама: Общий подход к оценкам снизу хроматического числа графов. Топологическая теорема Тверберга и её доказательство для простого количества частей. Деление мер на равные части на прямой.
- (28) Классические результаты Уитни и ван Кампена о вложениях в евклидово пространство. Понятие о контрпримере к топологической гипотезе Тверберга по Озайдину, Вагнеру, Мабийяру и Фрику.
- (29) Когомологии Чеха, лемма о нерве покрытия и топологическая теорема Хелли.

Лекции по курсу будут иногда проходить по ?????? в ??:?? в аудитории ??? ГК, первая лекция в ?????? семестре ????? года состоится ?? ??????, далее график будет определяться динамически. Всем, кто собирается посещать и/или сдавать курс,

рекомендуется сообщить о себе по адресу `r_n_karasev@mail.ru` для получения рассылки. Некоторые разделы из программы этого курса можно найти в конспекте [4]. Рекомендуемая литература — [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО КУРСУ

- [1] J. Eckhoff. Helly, Radon, and Carathéodory type theorems. In P. M. Gruber and J. M. Wills, editors, *Handbook of Convex Geometry*, chapter 2.1, pages 389–448. North-Holland, 1993.
- [2] P. M. Gruber. *Convex and Discrete Geometry*. Springer Verlag, 2007.
- [3] H. Kaplan, J. Matoušek, and M. Sharir. Simple proofs of classical theorems in discrete geometry via the Guth–Katz polynomial partitioning technique. *Discrete & Computational Geometry*, 48(3):499–517, 2012.
- [4] R. Karasev. *Geometry of measures: partitions and convex bodies*. 2013. www.rkarasev.ru.
- [5] J. Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*. Number 212 in Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, 2002.
- [6] J. Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam theorem: Lectures on topological methods in combinatorics and geometry*. Springer Verlag, 2003.
- [7] C. P. Rourke and B. J. Sanderson. *Introduction to Piecewise-Linear Topology*. Springer Verlag, 1972. русский перевод: К. Рурк, Б. Сандерсон. *Введение в кусочно линейную топологию*. Москва: Мир, 1974.