1. Отрезки на прямой и прямоугольники на плоскости

1.1 (Теорема Хелли на прямой). Докажите, что если в конечном семействе отрезков на прямой любые два пересекаются, то все отрезки семейства имеют общую точку.

1.2. Докажите, что если в конечном семействе отрезков никакая точка не принадлежит более чем k отрезкам, то отрезки семейства можно покрасить в k цветов так, что никакие два отрезка одного цвета не будут пересекаться.

1.3. Докажите, что если в конечном семействе отрезков из любых $k+1$ отрезка какие-то два пересекаются, то найдётся множество X из k точек такое, что всякий отрезок данного семейства содержит хотя бы одну точку X.

1.4. Пусть на плоскости дано семейство прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Докажите, что если в нём любые два прямоугольника пересекаются, то все прямоугольники имеют общую точку.

1.5. Пусть на плоскости дано семейство единичных квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Оказалось, что среди них нельзя найти $k+1$ попарно не пересекающихся. Докажите, что найдётся множество X из $2k-1$ точек такое, что всякий квадрат данного семейства содержит хотя бы одну точку X.

1.6. Пусть на плоскости дано семейство квадратов произвольного размера со сторонами, параллельными осям координат. Оказалось, что среди них нельзя найти $k+1$ попарно не пересекающихся. Докажите, что найдётся множество X из $4k-3$ точек такое, что всякий квадрат данного семейства содержит хотя бы одну точку X.

1.7. ** Пусть на плоскости дано семейство прямоугольников произвольных размеров со сторонами, параллельными осям координат. Оказалось, что среди них нельзя найти $k+1$ попарно не пересекающихся. Придумайте, как найти множество X как можно меньшего размера так, чтобы всякий прямоугольник данного семейства содержал хотя бы одну точку X.

1.8. Пусть на плоскости дано семейство прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Оказалось, что любые два прямоугольника семейства можно пересечь одновременно либо горизонтальной, либо вертикальной прямой. Докажите, что есть пара из горизонтальной и вертикальной прямой, таких что всякий прямоугольник семейства пересекает хотя бы одну из них.

1.9. * Пусть на плоскости дано семейство прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Оказалось, что любые из любых трёх прямоугольников семейства какие-то два можно пересечь одновременно либо горизонтальной, либо вертикальной прямой. Докажите, что есть четыре прямые, две горизонтальные и две вертикальные, такие что всякий прямоугольник семейства пересекает хотя бы одну из этих четырёх прямых.

2. Счёт углов и формула Эйлера

2.1. Докажите, что две замкнутые ломаные на плоскости в общем положении пересекаются в чётном количестве точек. Что такое *общее положение* в данном случае?

2.2 (Лемма Жордана для ломаных). Замкнутая ломаная на плоскости, не имеющая самопересечений, разбивает плоскость на две части (компоненты связности дополнения).

2.3 (Лемма Жордана в общем случае). * Непрерывная замкнутая кривая на плоскости, не имеющая самопересечений, разбивает плоскость на две части.

2.4. Не обязательно выпуклым многоугольником назовём замкнутую ломаную без самопересечений вместе с ограниченной частью, которую она отделяет от плоскости. Докажите, что любой необязательно выпуклый многоугольник с не менее 4 вершинами некоторым разрезом между вершинами (не пересекающим стороны многоугольника и не задевающим другие вершины) можно разрезать на два.

2.5. Докажите, что необязательно выпуклый многоугольник можно разрезать на треугольники и вершинами в вершинах исходного многоугольника.

2.6. Докажите, что сумма внутренних углов не обязательно выпуклого n-угольника равна

$$\pi(n-2).$$

2.7. Внутри квадрата даны N точек. После чего пары точек (включая вершины квадрата) соединяются отрезками, не пересекающимися друг с другом, до тех пор, пока это возможно. Найти количество полученных отрезков и доказать, что оно не зависит от того, какие отрезки проведены.

2.8 (Формула Эйлера). Для связного графа, нарисованного на плоскости так, что его ребра не пересекаются нигде, кроме как по вершинам, выполняется формула:

$$V - E + F = 2,$$

где V — число вершин графа, E — число рёбер и F — число областей, на которые граф разбивает плоскость линиями своих рёбер.

2.9. Пусть даны некоторые числа $D, A > 0$. Докажите, что плоскость нельзя разрезать на выпуклые семиугольники, диаметр каждого из которых не превосходит D, а площадь каждого не меньше A.

2.10. Докажите, что если снять одно из ограничений на диаметр или на площадь, то разрезать можно.

2.11. Докажите, что если квадрат разрезан на треугольники, то какие-то два из них имеют целую общую сторону.

2.12. Докажите, что выпуклый n-угольник нельзя разрезать менее чем на $n-2$ треугольника.

2.13. Докажите, что выпуклый многогранник с n вершинами в $\mathbb{R}^3$ нельзя разрезать менее чем на $n-3$ тетраэдра.

3. Множества точек и прямых на плоскости

Определение 3.1. Множество точек на плоскости *находится в общем положении*, если никакие три из них не лежат на одной прямой. Множество прямых на плоскости *находится в общем положении*, если никакие три из них не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны.

3.2. Любые n прямых общего положения пересекаются в $\frac{n(n-1)}{2}$ точках и делят плоскость на $\frac{n(n+1)}{2}+1$ частей.

3.3. На плоскости расположены n прямых общего положения. Мы хотим выбрать ориентацию на каждой прямой с выполнением следующего условия: если занумеровать на каждой прямой её точки пересечения с другими прямыми вдоль её ориентации числами от 1 до $n-1$, то ни в какой точке пересечения пары прямых не окажутся два одинаковых числа. При каких n это можно сделать?

3.4. n прямых общего положения делят плоскость на части. Докажите, что можно расставить в этих частях целые ненулевые числа, по модулю не превосходящие n так, что с каждой стороны от каждой исходной прямой сумма чисел равна нулю.

3.5 (Задача Сильвестра). Докажите, что если конечное множество точек на плоскости не лежит на одной прямой, то существует прямая, проходящая ровно через две из точек этого множества.

3.6. Возьмём на плоскости некоторую окружность и сопоставим каждой точке её полярную прямую, а каждой прямой её полярную точку относительно окружности. Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками и прямыми проективной плоскости. При этом отношение «точка лежит на прямой» переходит в отношение «прямая содержит точку».

3.7. На плоскости дано конечное множество прямых. Докажите, что либо они все проходят через одну точку, либо все они параллельны, либо есть точка, через которую проходят только две из них. Попробуйте решить с помощью полярного преобразования и без него.

3.8. На плоскости расположено конечное число красных и синих прямых, среди которых нет параллельных, так, что через любую точку пересечения прямых одного цвета проходит прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

3.9. На плоскости даны n точек, не лежащих на одной прямой, и проведены всевозможные прямые через все пары данных точек. Докажите, что получилось не менее n прямых.

3.10. * Сформулируйте и докажите аналог задачи Сильвестра для точек в $\mathbb{R}^3$.

4. Выпуклые многоугольники и фигуры

4.1. Докажите, что выпуклый многоугольник можно разрезать на параллелограммы тогда и только тогда, когда он является центрально симметричным.

4.2. Докажите, что если выпуклый многоугольник разрезан на параллелограммы, то один из этих параллелограммов имеет как минимум две стороны, лежащие на границе многоугольника.

Определение 4.3. *Аффинным диаметром* выпуклого тела на плоскости K называется такой отрезок, содержащийся в K, что в K не существует параллельного ему отрезка большей длины.

4.4. Докажите, что отрезок AB является аффинным диаметром K тогда и только тогда, когда его концы лежат на границе K и K можно заключить в полосу, содержащую точки A и B на своих противоположных краях.

4.5. Докажите, что для каждого выпуклого тела на плоскости K существует аффинный диаметр, параллельный всякой наперёд заданной прямой; для каждого выпуклого тела на плоскости K существует аффинный диаметр, проходящий через заданную точку. Когда можно утверждать о единственности?

4.6. Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — выпуклый n-угольник, никакие две стороны которого не параллельны. Для каждой стороны A_iA_{i+1} (считаем $A_{n+1} = A_1$) найдём максимально удалённую от прямой A_iA_{i+1} вершину A_k и обозначим треугольник, образованный этими стороной и вершиной T_i. Докажите, что треугольники T_i ($i = 1, \dots, n$) покрывают весь исходный многоугольник.

4.7. Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — выпуклый n-угольник, никакие две стороны которого не параллельны. Для каждой стороны A_iA_{i+1} (считаем $A_{n+1} = A_1$) найдём максимально удалённую от прямой A_iA_{i+1} вершину A_k и рассмотрим сумму всех возможных таких углов $\angle A_iA_kA_{i+1}$. Докажите, что эта сумма равна π.

4.8. Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — выпуклый n-угольник, все стороны которого равны между собой. Докажите, что найдутся как минимум два таких $k = 1,\dots,n$, что

$$\angle A_{k-1}A_kA_{k+1} \geq \angle A_{k-2}A_{k-1}A_k \quad \angle A_{k-1}A_kA_{k+1} \geq \angle A_kA_{k+1}A_{k+2},$$

где $A_{-1} = A_{n-1}$, $A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_1$ и $A_{n+2} = A_2$.

4.9. Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — выпуклый n-угольник, все углы которого равны между собой. Докажите, что найдутся как минимум два таких $k = 1,\dots,n$, что

$$|A_kA_{k+1}| \geq |A_{k-1}A_k| \quad |A_kA_{k+1}| \geq |A_{k+1}A_{k+2}|,$$

где $A_{-1} = A_{n-1}$, $A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_1$ и $A_{n+2} = A_2$.

5. Теоремы Каратеодори, Хелли и их аналоги

5.1 (Теорема Каратеодори). Назовём *выпуклой оболочкой* множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ минимальное выпуклое множество, содержащее X, обозначим $\operatorname{conv} X$. Докажите, что

$$\operatorname{conv} X = \bigcup_{Y\subseteq X\ |Y|\leq n+1} \operatorname{conv} Y.$$

5.2 (Теорема Фенхеля). Докажите, что если в предыдущей теореме X связно, то

$$\operatorname{conv} X = \bigcup_{Y\subseteq X\ |Y|\leq n} \operatorname{conv} Y.$$

5.3 (Цветная теорема Каратеодори–Бараня). Докажите, что если $X_0,\dots,X_n$ — множества в $\mathbb{R}^n$, каждое из которых содержит 0 в своей выпуклой оболочке, то существует система представителей $x_0 \in X_0, x_1 \in X_1,\dots,x_n \in X_n$, для которой

$$0 \in \operatorname{conv}\{x_0, x_1,\dots,x_n\}.$$

5.4. Докажите, что если $X_1,\dots,X_n$ — связные множества в $\mathbb{R}^n$, каждое из которых содержит 0 в своей выпуклой оболочке, то существует система представителей $x_1 \in X_1,\dots,x_n \in X_n$, для которой

$$0 \in \operatorname{conv}\{x_1, x_1,\dots,x_n\}.$$

5.5 (Теорема Радона). Докажете, что любое множество X из $n+2$ точек в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на два непустых множества $X = Y \sqcup Z$ так, что

$$\operatorname{conv} Y \cap \operatorname{conv} Z \neq \emptyset.$$

5.6. Пусть $t \leq n+1$ и $2t \geq n+2$. Докажете, что любое множество X из $n+2$ точек в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на два непустых множества $X = Y \sqcup Z$ так, что $|Z| = t$

$$\operatorname{conv} Y \cap \operatorname{aff} Z \neq \emptyset.$$

5.7 (Теорема Хелли). Пусть конечное семейство $\mathcal{F}$ выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ обладает свойством, что любые $n+1$ или менее множеств семейства имеют общую точку. Докажите, что все множества семейства $\mathcal{F}$ имеют общую точку ($\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.). Верно ли утверждение, если семейство бесконечно?

5.8. Пусть X — компактное подмножество $\mathbb{R}^n$. Докажите, что если любое его подмножество из $n+1$ или менее точек можно накрыть единичным шаром, то всё X можно накрыть единичным шаром.

5.9 (Теорема Юнга). Докажите, что множество $X \subset \mathbb{R}^n$ диаметра $\sqrt{2+2/n}$ можно накрыть единичным шаром.

5.10. Пусть X — компактное подмножество $\mathbb{R}^n$. Докажите, что если любое его подмножество из $n+1$ или менее точек можно накрыть единичным шаром, не содержащим начало координат, то всё X можно накрыть единичным шаром, не содержащим начало координат.

5.11 (Теорема о центральной точке). Пусть в $\mathbb{R}^n$ дано конечное множество X из N точек. Докажите, что найдётся точка $p \in \mathbb{R}^n$, такая, что для всякого полупространства $H \ni p$ будет $|X \cap H| \geq \frac{N}{n+1}$.

5.12 (Цветная теорема Хелли). Пусть $n+1$ непустое конечное семейство выпуклых множеств $\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_n$ обладает таким свойством: каждая система представителей

$$C_0 \in \mathcal{F}_0, \dots, C_n \in \mathcal{F}_n$$

имеет общую точку. Докажите, что некоторое $\mathcal{F}_i$ имеет общую точку.

5.13 (Дробная теорема Хелли на плоскости). Докажите, что для всякого $\alpha \in (0,1)$ найдётся $\beta(\alpha) \in (0,1)$, удовлетворяющее следующему условию. Если в семействе n выпуклых множеств на плоскости не менее αC_n^3 троек имеют общую точку, то найдётся точка, принадлежащая не менее $\beta(\alpha)n$ множествам из данного набора. Докажите, что можно выбрать $\beta(\alpha)$ так, чтобы $\lim_{\alpha\to 1-0} \beta(\alpha) = 1$.

5.14 (Теорема Тверберга). Докажите, что множество $X \subset \mathbb{R}^n$ из $(n+1)(r-1)+1$ точки можно разбить на r частей $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_r$ так, что

$$\operatorname{conv} X_1 \cap \dots \cap \operatorname{conv} X_r \neq \emptyset.$$

5.15. На плоскости дано 3 красных, 3 синих и 3 зелёных точки. Докажите, что все точки можно разбить на трёхцветные тройки так, что все треугольники, соответствующие тройкам, имеют общую точку.

5.16 (Цветная теорема Тверберга от Бараня и Лармана). ** На плоскости дано n красных, n синих и n зелёных точек. Докажите, что все точки можно разбить на трёхцветные тройки так, что все треугольники, соответствующие тройкам, имеют общую точку.

6. Протыкание и теоремы типа Хелли с помощью алгебры

6.1 (Сильное свойство Хелли для линейных пространств). Пусть V — линейное пространство размерности n, $\mathcal{F}$ — семейство его линейных подпространств. Докажите, что найдутся не более n представителей $L_1, \dots, L_m \in \mathcal{F}$ $(m \leq n)$ такие, что

$$\bigcap_{i=1}^m L_i = \bigcap_{L\in\mathcal{F}} L := \bigcap \mathcal{F}.$$

6.2. Пусть V — линейное пространство размерности n, $\mathcal{F}$ — семейство его линейных подпространств, $S \subset V$ — произвольное подмножество. Докажите, что найдутся не более n представителей $L_1, \dots, L_m \in \mathcal{F}$ $(m \leq n)$ такие, что

$$\bigcap_{i=1}^m L_i \cap S = \bigcap_{L\in\mathcal{F}} L \cap S = (\bigcap \mathcal{F}) \cap S.$$

6.3. Пусть S — произвольное множество, V — линейное пространство функций $S \to \mathbb{K}$ (для некоторого поля $\mathbb{K}$), $\dim V = n$. Для всякой $f \in V$ обозначим её множество нулей $Z_f = \{x \in S : f(x) = 0\}$. Пусть $\mathcal{F}$ является семейством подмножеств S вида Z_f для некоторых $f \in V$. Докажите, что найдётся не более n множеств $X_1, \dots, X_m \in \mathcal{F}$ $(m \le n)$, таких что

$$\bigcap_{i=1}^{m} X_i = \bigcap \mathcal{F}.$$

6.4 (Теорема Хелли для конечных множеств). Пусть S — произвольное множество и $\mathcal{F}$ — семейство его подмножеств, в каждом не более n элементов. Докажите, что найдётся не более $n+1$ множеств $X_1, \dots, X_m \in \mathcal{F}$ $(m \le n+1)$, таких что

$$\bigcap_{i=1}^{m} X_i = \bigcap \mathcal{F}.$$

6.5. Докажите, что если в семействе окружностей на плоскости любые 4 или менее имеют общую точку, то все окружности в этом множестве имеют общую точку.

6.6. Докажите, что если в некотором множестве окружностей на плоскости любые 3 или менее окружностей имеют общую точку и количество окружностей не менее 5, то все окружности имеют общую точку.

6.7. На плоскости отмечено конечное множество точек. Известно, что любые 6 или менее отмеченных точек лежат на паре прямых. Докажите, что все точки лежат на паре прямых.

6.8. На плоскости нарисованы графики нескольких многочленов степени не выше d. Докажите, что если любые $d+2$ или менее графика имеют общую точку, то все графики имеют общую точку.

6.9. Для семейства множеств $\mathcal{F}$ множество T называется *t-трансверсалью*, если $|T| \le t$ и всякое $X \in \mathcal{F}$ пересекается с T. Пусть V — векторное пространство размерности n, $\mathcal{F}$ — семейство его линейных подпространств. Докажите, что если всякое подсемейство $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ размера $|\mathcal{G}| \le \binom{n+t-1}{t}$ имеет t-трансверсаль, то всё семейство $\mathcal{F}$ имеет t-трансверсаль.

6.10. Пусть S — произвольное множество, V — линейное пространство функций $S \to \mathbb{K}$ (для некоторого поля $\mathbb{K}$), $\dim V = n$. Для всякой $f \in V$ обозначим её множество нулей $Z_f = \{x \in S : f(x) = 0\}$. Пусть $\mathcal{F}$ является семейством подмножеств S вида Z_f для некоторых $f \in V$. Докажите, что если всякое подсемейство $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ размера $|\mathcal{G}| \le \binom{n+t-1}{t}$ имеет t-трансверсаль, то всё семейство $\mathcal{F}$ имеет t-трансверсаль.

6.11. Пусть S — произвольное множество и $\mathcal{F}$ — семейство его подмножеств, в каждом не более n элементов. Докажите, что если всякое подсемейство $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ размера $|\mathcal{G}| \le \binom{n+t}{t}$ имеет t-трансверсаль, то всё семейство $\mathcal{F}$ имеет t-трансверсаль.

6.12 (Линейная теорема Холла). Пусть в векторном пространстве V даны конечные множества $S_1, \dots, S_n$ со следующим свойством: для любого набора индексов $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ (включая наборы из одного индекса) линейная оболочка

$$\langle S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup \dots \cup S_{i_k} \rangle$$

имеет размерность не менее k. Докажите, что найдётся система представителей $s_i \in S_i$, которая является линейно независимой.

6.13 (Цветная теорема Хелли для линейных пространств). Пусть размерность линейного пространства V равна n, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ — семейства линейных подпространств V. Докажите, что для некоторой системы представителей $L_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, L_n \in \mathcal{F}_n$ и некоторого j

$$L_1 \cap \dots \cap L_n \subseteq \bigcap \mathcal{F}_j.$$

6.14 (Цветная теорема Хелли для конечных множеств). Пусть S — произвольное множество и $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ — семейства его подмножеств. Все подмножества в каждом семействе состоят из не более чем из n элементов. Известно, что для любой системы представителей $X_i \in \mathcal{F}_i$ $(0 \le i \le n)$:

$$\bigcap_{i=0}^{n} X_i \neq \emptyset.$$

Тогда для некоторого i пересечение $\bigcap \mathcal{F}_i$ непусто.

6.15. В пространстве $\mathbb{R}^n$ дано семейство $\mathcal{F}$ (аффинных) прямых, любые две из которых пересекаются. Докажите, что либо всё $\mathcal{F}$ лежит в одной двумерной аффинной плоскости, либо все прямые $\mathcal{F}$ имеют общую точку.

6.16. В пространстве $\mathbb{R}^n$ дано семейство $\mathcal{F}$ аффинных k-мерных подпространств, любые $k+2$ из которых имеют общую точку. Докажите, что $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

6.17. На плоскости отмечено конечное множество из более чем $d+1$ точек с попарно различными абсциссами. Известно, что график многочлена степени не выше d, проведённый через любые $d+1$ из них, содержит ещё одну отмеченную точку. Докажите, что все точки лежат на графике многочлена степени не выше d.

6.18. Докажите, что для любого натурального k в пространстве можно отметить $2k+3$ точек так, что с каждой стороны от любой плоскости, проходящей через начало координат, лежит не менее k отмеченных точек.

6.19. На плоскости отмечено n красных и m синих прямых. Отмечены также nm точек пересечения пары прямых разных цветов. Докажите, что если набор зелёных прямых покрывает все отмеченные точки, кроме одной, то зелёных прямых не менее $n+m-2$.

6.20. Даны два конечных множества действительных чисел A и B, обозначим

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}.$$

Докажите, что для количеств элементов множества имеет место неравенство

$$|A + B| \geq |A| + |B| - 1.$$

6.21. Даны два конечных множества остатков по модулю простого числа A и B, обозначим множество остатков

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}.$$

Докажите, что для количеств элементов множества имеет место неравенство

$$|A + B| \geq \min\{|A| + |B| - 1, p\}.$$

7. Конфигурации из целочисленных точек

7.1. Докажите, что у выпуклого 1000000-угольника с вершинами в целых точках какая-то сторона имеет длину более 550.

7.2. Докажите, что если у выпуклого многоугольника с вершинами в целых точках все стороны равны, то количество его вершин чётно.

7.3. Докажите, что не существует правильных n-угольников с вершинами в точках с целыми координатами при $n = 3, 5, 6$.

7.4. Докажите, что не существует правильных n-угольников с вершинами в точках с целыми координатами при $n \geq 7$.

7.5. На плоскости отмечено несколько точек. Для любых трёх из них существует декартова система координат, в которой эти точки имеют целые координаты. Докажите, что существует декартова система координат, в которой все отмеченные точки имеют целые координаты.

7.6. Пусть у многогранника P в $\mathbb{R}^n$ все вершины имеют целые координаты и их количество не менее 2^n+1. Докажите, что P содержит ещё какую-то точку с целыми координатами помимо своих вершин.

7.7 (Целочисленная теорема Хелли). Пусть конечное семейство $\mathcal{F}$ выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ обладает свойством, что любые 2^n или менее множеств семейства имеют общую точку с целыми координатами. Докажите, что все множества семейства $\mathcal{F}$ имеют общую точку с целыми координатами ($\mathbb{Z}^n \cap \bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.).

7.8 (Теорема Минковского). Пусть K – центрально симметричное выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ объёма не менее 2^n. Докажите, что K содержит точку с целыми координатами, отличную от начала координат.

7.9. ** Пусть K – выпуклое тело на плоскости, содержащее начало координат и для полярного тела пусть $\operatorname{vol} K^\circ \le 3/2$. Докажите, что K содержит точку с целыми координатами, отличную от начала координат.

7.10. ** (Нерешённая задача) Пусть K – выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, содержащее начало координат и для полярного тела пусть $\operatorname{vol} K^\circ \le \frac{n+1}{n!}$. Докажите, что K содержит точку с целыми координатами, отличную от начала координат.

8. Неравенства для объёмов и интегралов

8.1 (Неравенство Брунна–Минковского на прямой). Пусть $X, Y \subseteq \mathbb{R}^1$ — измеримые подмножества, меру Лебега будем обозначать vol. Докажите неравенство

$$\operatorname{vol}(X+Y) \ge \operatorname{vol}(X) + \operatorname{vol}(Y),$$

где $X+Y = \{x+y, x \in X,\ y \in Y\}$.

8.2 (Функциональное неравенство Брунна–Минковского на прямой). Пусть $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ — измеримые функции, а $t \in (0,1)$. Предположим, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется

$$h((1-t)x + ty) \ge f(x)^{1-t} g(x)^t.$$

Докажите, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, dx \ge \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \right)^{1-t} \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx \right)^{t}.$$

8.3 (Функциональное неравенство Брунна–Минковского). Докажите, что предыдущее неравенство верно и для функций n переменных и их интегралов по всему пространству, используйте индукцию по n.

8.4 (Неравенство Брунна–Минковского). Докажите, что для двух измеримых множеств $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ и $t \in (0,1)$ выполняется

$$\operatorname{vol}((1-t)X + tY) \ge \operatorname{vol}(X)^{1-t} \cdot \operatorname{vol}(Y)^t.$$

Используя гомотетию и варьирование параметра t, докажите также

$$\operatorname{vol}(X+Y)^{1/n} \ge \operatorname{vol}(X)^{1/n} + \operatorname{vol}(Y)^{1/n}.$$

8.5*.* Обозначим t-окрестность множества X через $U_t(X)$. Определим нижнюю площадь поверхности по Минковскому

$$\underline{\mathrm{vol}}^+_{n-1} X = \liminf_{t\to+0} \frac{\mathrm{vol}\, U_t(X) - \mathrm{vol}\, X}{t}.$$

Докажите, что для множества X с границей класса C^2 это просто риманова $(n-1)$-мерная площадь поверхности.

8.6 (Изопериметрическая задача для площади по Минковскому)*.* Докажите, что при фиксированном $\mathrm{vol}\, X$ минимальное $\underline{\mathrm{vol}}^+_{n-1} X$ достигается для шара. Выпишете соответствующую оценку площади поверхности через объём.

8.7 (Неравенство Прекопы–Ляйндлера)*.* Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$ k-сильно логарифмически вогнута при некотором $k \ge 0$, то есть

$$d^2(\log f) \le -2k(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$$

в смысле обобщённых функций. Докажите, что её проекция

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)\, dx_n$$

тоже k-сильно логарифмически вогнута.

8.8*.* Назовём борелевскую меру μ на $\mathbb{R}^n$ *логарифмически вогнутой*, если

$$\mu((1-t)X + tY) \ge \mu(X)^{1-t} \cdot \mu(Y)^t$$

для любых выпуклых тел X и Y. Докажите, что для меры с плотностью это эквивалентно логарифмической вогнутости функции плотности ($k = 0$ в предыдущей задаче).

8.9*.* * Докажите, что конечную логарифмически вогнутую меру μ на $\mathbb{R}^n$ можно сколь угодно близко приблизить проекциями равномерных мер на выпуклых множествах.

8.10*.* Пусть K и L — центрально симметричные выпуклые тела. Докажите, что максимум объёма $\mathrm{vol}\, K \cap (L + t)$ по сдвигам $t \in \mathbb{R}^n$ достигается при $t = 0$.

8.11 (Неравенство Роджерса–Шепарда)*.* Докажите неравенство для выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{vol}(K - K) \le \binom{2n}{n} \mathrm{vol}\, K.$$

8.12 (Теорема Грюнбаума–Хаммера)*.* Докажите, что в выпуклом теле K есть точка $m \in K$ со следующим свойством: любое полупространство, содержащее m, содержит не менее $1/e$ от объёма K.

8.13 (Теорема о центральной точке для логарифмически вогнутых мер)*.* Докажите, что для конечной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ найдётся точка $m \in \mathbb{R}^n$ со следующим свойством: для любого полупространства $H \ni m$

$$\mu(H) \ge \frac{1}{e}\mu(\mathbb{R}^n).$$

8.14*.* * Докажите, что для выпуклых тел K и L выражение

$$\mathrm{vol}(K + tL)$$

является многочленом от $t \ge 0$. Докажите, что коэффициенты этого многочлена являются монотонными по включению функциями от K и L.

9. Многогранники

9.1. Докажите, что ограниченное решение конечной системы линейных неравенств в $\mathbb{R}^n$ является *многогранником*, то есть выпуклой оболочкой конечного множества точек.

9.2. Разбиение $\mathbb{R}^n$ называется *регулярным*, если оно является проекцией графика выпуклой кусочно-линейной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (то есть является разбиением на максимальные участки линейности этой функции). Приведите примеры не регулярных разбиений $\mathbb{R}^2$ на выпуклые части.

9.3 (Теорема Эдельсбруннера). Докажите, что всякое регулярное разбиение $\mathbb{R}^n$ упорядочено относительно любого направления $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$. А именно, части разбиения можно упорядочить так, что при движении в направлении ν из любой точки они будут встречаться в данном порядке.

9.4. * Регулярным разбиением множества $X \subset \mathbb{R}^n$ назовём ограничение регулярного разбиения $\mathbb{R}^n$ на X. Докажите, что если $B^n = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_N$ — регулярное разбиение единичного шара некоторой нормы в $\mathbb{R}^n$, то в часть P_i можно вписать шар (той же нормы) радиуса r_i так, что

$$r_1 + r_2 + \dots + r_N \geq 1.$$

9.5. * Докажите, что в размерности 2 в задаче 9.4 условие регулярности разбиения не нужно.

9.6 (Теорема Кадеца). ** Докажите, что в любой размерности для евклидова шара в задаче 9.4 условие регулярности разбиения не нужно, а также разбиение можно заменить на покрытие выпуклыми множествами.

9.7 (Нерешённая задача – гипотеза К. Бездека). ** Докажите, что в любой размерности для любой нормы в задаче 9.4 условие регулярности разбиения не нужно.

9.8 (Теорема Минковского — формула). Пусть у многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ полной размерности гиперграни $F_1, \dots, F_N$ имеют нормали $\nu_1, \dots, \nu_N$ и площади $A_1, \dots, A_N$, докажите, что

$$\nu_1 A_1 + \dots + \nu_N A_N = 0.$$

9.9 (Теорема Минковского — существование и единственность). ** Докажите, что для любого набора площадей и нормалей, удовлетворяющих условию

$$\nu_1 A_1 + \dots + \nu_N A_N = 0,$$

и дополнительно условию порождения всего $\mathbb{R}^n$ нормалями, существует многогранник с такими площадями и нормалями граней. Докажите, что он определён единственным образом с точностью до параллельных переносов.

9.10. Пусть $\mathbb{R}^n$ разбито на сдвиги одного и того же многогранника P. Докажите, что P центрально симметричен.

9.11 (Нерешённая задача — гипотеза Вороного). ** Пусть $\mathbb{R}^n$ разбито на сдвиги одного и того же многогранника P. Докажите, что это разбиение регулярно.

9.12 (Теорема Бараня–Ловаса). ** Многогранник в $\mathbb{R}^n$ полной размерности называется *простым*, если в каждой его вершине сходятся n рёбер. Докажите, что любой центрально-симметричный простой многогранник в $\mathbb{R}^n$ имеет не менее 2^n вершин.

9.13 (Теорема Стенли). ** Докажите, что центрально-симметричный простой многогранник в $\mathbb{R}^n$ имеет не менее 3^n граней всех размерностей (сам многогранник считается за n-мерную грань).

9.14 (Нерешённая задача). ** Докажите, что центрально-симметричный и не обязательно простой многогранник в $\mathbb{R}^n$ имеет не менее 3^n граней всех размерностей (сам многогранник считается за n-мерную грань).

10. Теоремы типа Рамсея

Следующие задачи говорят о том, что если множество точек на плоскости достаточно велико, то в нем найдётся заданная конфигурация точек:

10.1. Докажите, что в множестве из $C_{2k-4}^{k-2} + 1$ точек в общем положении на плоскости всегда найдутся k точек, образующие выпуклый k-угольник.

10.2. В множестве из 2^n точек на плоскости в общем положении найдутся три точки, образующие треугольник, один из углов которого не менее $(1 - \frac{1}{n})\pi$.

Бывают и утверждения в обратную сторону:

10.3. Докажите, что на плоскости можно выбрать множество из сколь угодно большого числа точек общего положения, в котором нет семи точек, образующих выпуклый семиугольник без других точек этого множества внутри семиугольника.

11. Триангуляции Делоне и разбиения Вороного

Определение 11.1. Фигура F на плоскости триангулирована, если она представлена в виде объединения треугольников, каждая пара которых либо не пересекается, либо пересекается по вершинам, либо пересекается по полным сторонам.

11.2. Докажите, что выпуклую оболочку конечного множества X, не лежащего на одной прямой, можно триангулировать так, что вершины треугольников триангуляции совпадают с множеством X.

Определение 11.3. Будем рассматривать триангуляции выпуклой оболочки конечного множества X, в которых вершинами треугольников являются в точности точки X. Дадим определение некоторого класса таких триангуляций. *Триангуляцией Делоне* называется такая триангуляция выпуклой оболочки конечного множества X с вершинами в X, что описанная окружность каждого треугольника триангуляции не содержит внутри себя никаких точек X.

11.4. Докажите, что для всякого X, не лежащего на одной прямой, существует триангуляция Делоне выпуклой оболочки X.

11.5. Докажите, что если множество X общего положения и никакие 4 его точки не лежат на одной окружности, то две точки A и B соединены ребром в триангуляции Делоне тогда и только тогда, когда существует круг K такой, что $K \cap X = \{A, B\}$. В этом случае триангуляция Делоне единственна.

11.6. Докажите, что любые n различных точек плоскости можно раскрасить в некоторое количество цветов, не превосходящее $10 \ln n$, так, чтобы в каждом круге, содержащем по крайней мере одну из этих точек, была ровно одна точка некоторого цвета.

Определение 11.7. *Разбиением Вороного* для конечного множества X называется разбиение плоскости на семейство множеств $\{V_x\}_{x \in X}$

$$V_x = \{p : \forall x' \in X \ |p - x| \leq |p - x'|\}.$$

11.8. Как связаны триангуляция Делоне выпуклой оболочки X и соответствующее разбиение Вороного для множеств X общего положения, в которых никакие 4 точки не лежат на одной окружности?

11.9. На плоскости дано конечное множество непересекающихся кругов $K_1, K_2, \dots, K_n$. Докажите, что плоскость можно разбить на выпуклые фигуры $C_1, C_2, \dots, C_n$, пересекающиеся только по границам так, что для любого $i = 1, 2, \dots, n$ $K_i \subseteq C_i$.

11.10 (Теорема Эдельсбруннера). * Рассмотрим объединение шаров $B_{c_i}(R_i)$ в $\mathbb{R}^n$. Для каждого шара выпишем функцию

$$f_i(x) = R_i^2 - |x - c_i|^2,$$

и определим часть

$$P_i = \{x \in \bigcup_i B_{c_i}(R_i) : \forall j\ f_i(x) \geq f_j(x)\}.$$

Докажите, что формула включений-исключений может быть упрощена до

$$\operatorname{vol} \bigcup_i B_{c_i}(R_i) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_k} \neq \emptyset} \operatorname{vol}\left(B_{c_{i_1}}(R_{i_1}) \cap \dots \cap B_{c_{i_k}}(R_{i_k}) \right).$$

12. Наборы векторов

12.1. В $\mathbb{R}^n$ даны точки A_1, A_2, $\dots$, A_N и точки B_1, B_2, $\dots$, B_N. Докажите, что точки B_i можно перенумеровать так, что для всех $i \neq j$ будет выполняться (имеется в виду скалярное произведение векторов):

$$\overline{A_i A_j} \cdot \overline{B_i B_j} \geq 0.$$

12.2. На плоскости дано N векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_N$. Известно, что их длины не превосходят 1. Докажите, что можно так расставить знаки $+$ и $-$ вместо $*$ в выражении

$$\overline{a}_1 * \overline{a}_2 * \dots * \overline{a}_N,$$

что модуль итогового вектора будет не более $\sqrt{2}$.

12.3. * В $\mathbb{R}^n$ дано N векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\dots$, $\overline{a}_N$. Известно, что их длины не превосходят 1. Докажите, что можно так расставить знаки $+$ и $-$ вместо $*$ в выражении

$$\overline{a}_1 * \overline{a}_2 * \dots * \overline{a}_N,$$

что модуль итогового вектора будет не более $\sqrt{n}$.

13. Покрытия и упаковки

Определение 13.1. *Шириной в направлении прямой ℓ* замкнутого выпуклого множества X называется длина проекции этого множества на прямую ℓ. Просто *шириной* множества X называется минимальная по всем направлением ширина.

13.2. Докажите, что для замкнутых выпуклых множеств X и Y утверждения равносильны:
1) Ширина X в любом направлении не превосходит ширины Y;
2) $X + (-X) \subseteq Y + (-Y)$ (имеется в виду сумма Минковского).

13.3. Докажите, что во всяком выпуклом теле $K \subset \mathbb{R}^n$ найдётся точка O такая, что всякая хорда $AB \ni O$ (то есть отрезок с концами на границе K) делится точкой O в отношении $1 : n \leq \alpha \leq n : 1$.

13.4. Пусть даны два выпуклых тела на плоскости X и Y и ширина Y в любом направлении не более $1/2$ ширины X в том же направлении. Докажите, что параллельным переносом можно поместить Y в X.

13.5. На плоскости дано конечное множество точек X и правильный треугольник T. Известно, что любые две точки из X можно покрыть параллельным переносом T. Докажите, что все множество X можно покрыть тремя параллельными переносами T.

13.6. На плоскости дано конечное множество точек X и правильный треугольник T. Известно, что любые $k \leq 9$ точек из X можно покрыть двумя параллельными переносами T. Докажите, что все множество X можно покрыть двумя параллельными переносами T.

13.7. Докажите, что в любое выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^n$ можно поместить параллельный перенос его гомотета $-\frac{1}{n}K$.

13.8. Тетраэдр содержится в шаре диаметра 1. Докажите, что его ширина в некотором направлении не более $1/\sqrt{3}$.

13.9 (Теорема Моэсе). Докажите, что круг диаметра 1 нельзя покрыть полосками, суммарная ширина которых меньше 1.

13.10 (Теорема Гудмана–Гудмана). * Пусть набор шаров в произвольной норме $\mathbb{R}^n$ обладает свойством *неотделимости*: нет гиперплоскостей, не пересекающих ни один из данных шаров и имеющих шары с обоих сторон от себя. Докажите, что неотделимый набор шаров радиусов $R_1, R_2, \dots, R_N$ можно накрыть одним шаром радиуса $R_1 + R_2 + \dots + R_N$.

13.11 (Теорема Куперберга–Куперберга). * Докажите, что для всякой выпуклой фигуры $K \subset \mathbb{R}^2$ её параллельные переносы, вместе с параллельными переносами $-K$, можно упаковать на плоскости с плотностью покрытия не менее $\sqrt{3}/2$.

13.12. Докажите, что связный граф в $\mathbb{R}^n$ (нарисованный отрезками) длины 2 в некоторой норме можно накрыть шаром радиуса 1 в этой норме.

13.13. Докажите, что замкнутую ломаную в $\mathbb{R}^n$ длины 4 в некоторой норме можно накрыть шаром радиуса 1 в этой норме.

13.14. Докажите, что если на границе единичного евклидова шара $B \subseteq \mathbb{R}^n$ находится гладкая кривая длины менее 2π, то её можно накрыть меньшим евклидовым шаром.