

## КУРС «ОСНОВЫ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ»

Роман Николаевич Карасёв, [r\\_n\\_karasev@mail.ru](mailto:r_n_karasev@mail.ru)

- (1) Некоторые основы алгебры. Модули над кольцами, примеры колец и модулей, модули над кольцом  $\mathbb{Z}$ . Подмодуль и фактор модуль, короткая точная последовательность, гомоморфизмы модулей. Цепные комплексы модулей. Определение гомологий цепных комплексов.
- (2) Гомоморфизмы цепных комплексов. Точная последовательность цепных комплексов. Длинная точная последовательность гомологий, соответствующая короткой точной последовательности комплексов. Коммутативные диаграммы и приёмы работы с ними.
- (3) Симплициальные комплексы и их геометрические реализации — полиэдры. Комплексы симплициальных цепей. Симплициальные отображения. Сравнение конструкций цилиндра, конуса, гомотопии для симплициальных комплексов и для абстрактных цепных комплексов.
- (4) Симплициальные множества, их категорное описание и геометрическая реализация. Оператор границы и гомологии симплициальных множеств.
- (5) Геометрический симплекс как симплициальное множество. Конструкция произведения симплициальных множеств. Симплициальное множество сингулярных симплексов топологического пространства и сингулярные гомологии топологического пространства.
- (6) Сингулярные гомологии пары, длинная точная последовательность гомологий для пары и для тройки. Изоморфизм вырезания для гомологий. Точная последовательность Майера–Вьеториса.
- (7) Гомологии сферы. Степень отображения и гомотопическая классификация отображений сферы в себя.
- (8) CW-комплексы, отображение, сохраняющие остовы, продолжение гомотопии с остова. Цепной комплекс CW-комплекса, его оператор границы, поведение при отображениях, составляющих остовы, гомотопическая инвариантность.
- (9) Понятие о гомотопических группах, их сравнение с гомологическими группами, отсутствие свойства вырезания. Гомоморфизм и изоморфизм Гуревича.
- (10) Надстройка и её гомологии. Произведение CW-комплексов и тензорное произведение цепных комплексов. Формула Кюннета — гомологии (с коэффициентами в поле) декартова произведения пространств. Когомологии и гомологии с коэффициентами.
- (11) Внешнее умножение в гомологиях и  $\cup$ -умножение в когомологиях. Умножение в относительных когомологиях пары.  $\cap$ -умножение между гомологиями и когомологиями.
- (12) Гладкие многообразия и многообразия с краем. Ориентация многообразия и её гомологический смысл. Фундаментальный класс гомологий компактного ориентированного многообразия. Открытые многообразия, локально-конечные гомологии и когомологии с компактным носителем, фундаментальный класс открытого многообразия.
- (13) Двойственность Пуанкаре–Лефшеца для ориентированных многообразий. Триангуляции многообразий и двойственные клеточные разбиения, описание двойственности Пуанкаре в этих терминах. Псевдомногообразия, класс сингулярных гомологий любого пространства как образ фундаментального класса псевдомногообразия.

- (14) Интерпретация умножения когомологий на многообразии как пересечения циклов. Геометрические подходы к определению когомологий клеточных комплексов.
- (15) Кольца когомологий вещественного и комплексного проективного пространства. Когомологии с коэффициентами по модулю два и двойственность Пуанкаре для неориентированных многообразий. Теорема Борсука–Улама.
- (16) Число зацепления и двойственность Александра для подмножеств сферы. Двойственность Александра для подмножеств сферы. Теорема Жордана о простой замкнутой кривой на плоскости. Двойственность Александра в симплициальных комплексах.
- (17) Строение поверхностей уровня гладкой функции около невырожденной критической точки. Теория Морса, приклеивание ручек к многообразию с краем. Понятие о сокращении ручек и  $h$ -кобордизме. Осциллирующие интегралы и приближение стационарной фазы.
- (18) Вычисление гомологий многообразия по комплексу Морса, описание дифференциала. Доказательство корректности определения, «лемма о склеивании» в теории Морса, доказательство независимости определения от выбора функции. Интерпретация двойственности Пуанкаре в теории Морса.
- (19) Другие инварианты функции на топологическом пространстве: “persistence diagram” для гомологий как разложение модуля кольцом многочленов от одной переменной и как орбиты оператора границы относительно умножений на верхнетреугольные матрицы слева и справа. Свойство стабильности persistence diagram.
- (20) Локально-тривиальные расслоения. Задание расслоения 1-коциклом с коэффициентами в структурной группе, главные расслоения, векторные расслоения и редукция структурной группы до ортогональной.
- (21) Обратный образ локально-тривиального расслоения. Классифицирующие пространства для расслоений с заданной компактной структурной группой. Конструкция с джойном и конструкция с многообразием Штифеля. Доказательство высокой связности и свойства универсальности.
- (22) Достаточные условия того, чтобы когомологии пространства расслоения были свободным модулем над когомологиями базы. Изоморфизм Тома. Когомологии проективизации комплексного или вещественного векторного расслоения.
- (23) Определение характеристических классов Чженя и Штифеля–Уитни через когомологии проективизации расслоения. Прямая сумма расслоений и мультипликативность характеристических классов.
- (24) Приведение матриц к гауссовой форме, клетки Шуберта и когомологии комплексных и вещественных грассманианов. Принцип расщепления, пространства флагов и когомологии грассманианов через теорему о симметрических многочленах.
- (25) Класс Чженя одномерных комплексных расслоений как гомоморфизм абелевых групп. Формула для характеристических классов тензорного произведения. Характеристические классы Понтрягина и Эйлера вещественных векторных расслоений.
- (26) Геометрическое описание класса Эйлера ориентированного расслоения над замкнутым ориентированным многообразием. Связь класса Эйлера касательного расслоения с эйлеровой характеристикой. Геометрические описания классов Чженя и Штифеля–Уитни.
- (27) Характеристические классы касательного расслоения многообразия. Касательные расслоения проективного пространства и грассманианов. Препятствия

- для погружения многообразий. Характеристические числа гладкого многообразия и их инвариантность относительно бордизма.
- (28) Аддитивность следа линейного отображения. Теорема Лефшеца для неподвижных точек отображения. Класс диагонали многообразия в декартовом квадрате. Ещё одно объяснение связи эйлеровой характеристики с векторными полями. Вывод теоремы Дольда про пространства со свободным действием группы из теоремы Лефшеца.
  - (29) Стабильные гомотопические группы сфер. Конструкция Понтрягина и доказательство стабильности. Инвариант Хопфа, его нестабильность. Общий случай теоремы Фрейдентала о надстройке. Стабильная гомотопическая категория, стабильные гомотопии и когомотопии.
  - (30) Пространства со свободным действием группы (главные расслоения), случай конечной группы. Фундаментальная группа топологического пространства и накрытия, примеры вычисления фундаментальных групп с помощью накрытий.
  - (31) Понятие о когомологиях групп с топологической точки зрения. Эквивариантные когомологии конструкции Бореля. Род Шварца пространства с действием конечной группы, его гомологическая оценка снизу и классические результаты теории Люстерника–Шнирельмана.
  - (32) Понятия гомотопической топологии. Свойства гомотопических групп, слабая гомотопическая эквивалентность, CW-аппроксимации. Понятия “fibration” и “cofibration”. Превращение любого отображения в гомотопически эквивалентное ему “fibration” или “cofibration”. Гомотопические варианты длинной точной последовательности пары.

Лекции по курсу будут иногда проходить по вторникам в 15:30 в аудитории 418 ГК, первая лекция в весеннем семестре 2016 года состоится 9 февраля (с пункта 14 программы), далее график будет определяться динамически. Всем, кто собирается посещать и/или сдавать курс, рекомендуется сообщить о себе по адресу [r\\_n\\_karasev@mail.ru](mailto:r_n_karasev@mail.ru) для получения рассылки.

За пределами этого курса: пространства Эйленберга–Маклейна и теория препятствий, спектральные последовательности, инъективные и проективные объекты и резольвенты, производные функторы, пучки и их когомологии, когомологии де Рама, когомологические операции и квадраты Стиррода, рациональная теория гомотопий, башни Постникова, спектральная последовательность Адамса, K-теория, кобордизмы, топология гладких многообразий, топология многообразий в размерностях 3 и 4.

#### РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО КУРСУ

- [1] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии*. Наука, Москва, 1989.
- [2] Р. Годеман. *Алгебраическая топология и теория пучков*. Издательство иностранной литературы, Москва, 1961.
- [3] А. Хатчер. *Алгебраическая топология*. Издательство МЦНМО, Москва, 2011.
- [4] А. С. Мищенко. *Векторные расслоения и их применения*. Наука, Москва, 1984.
- [5] С. А. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge University Press, 1994.