*Модел. и анализ информ. систем.* Т.**14**, №**4** (2007) 66–70

УДК 515.1

# Род и категория Люстерника-Шнирельмана прообразов

Р.Н. Карасёв [1]

*Московский физико-технический институт*

*получена* 22 сентября 2007

**Аннотация**

В работе вводится некоторое аксиоматическое обобщение понятия относительной категории Люстерника-Шнирельмана и для него доказывается оценка на категорию прообраза точки (или её окрестностей) при отображении в конечный полиэдр.

## 1. Формулировки результатов

Для начала дадим определение, которое выделяет некоторые общие свойства разных видов понятия категории в духе Люстерника-Шнирельмана.

**Определение.** Пусть $X$ — топологическое пространство, а $k$ — функция, определённая на непустых открытых подмножествах $X$, обладающая следующими свойствами:

1) если $U \subseteq V$, то $k(U) \le k(V)$ (монотонность);
2) $k(U_1 \cup \dots \cup U_n) \le k(U_1) + \dots + k(U_n)$ (субаддитивность);
3) $k(U_1 \cup \dots \cup U_n) \le \max\{k(U_1), \dots, k(U_n)\}$, если замыкания $\operatorname{cl} U_1, \dots, \operatorname{cl} U_n$ попарно не пересекаются.

Такую функцию $k$ будем называть *обобщённой относительной категорией*.

Ясно, что относительная категория Люстерника-Шнирельмана $\operatorname{cat}_X U$ из [1] является обобщённой относительной категорией, если пространство $X$ линейно связно. Есть и другие примеры обобщённой относительной категории.

Далее топологические пространства будут предполагаться паракомпактными абсолютными окрестностными ретрактами, чтобы избежать возможных тонкостей с определениями категории. В таком случае в определении категории Люстерника-Шнирельмана можно открытые множества заменить на замкнутые.

Пусть $G$ — конечная группа. Напомним определение.

**Определение.** Пусть $Y$ — свободное $G$-пространство. Тогда минимальное $k$, для которого существует $G$-эквивариантное (перестановочное с действием $G$) отображение $Y \to G * \dots * G = G^{*k}$ ($k$-кратный джойн $G$ с диагональным действием $G$ сдвигами), называется *родом пространства* $Y$. Обозначение $k = g_G(Y)$.

Далее будет показано, что если $Y$ — свободное $G$ пространство, а $\pi : Y \to Y/G$ — естественная проекция, то функция $k(U) = g_G(\pi^{-1}(U))$ является обобщённой относительной категорией на $X = Y/G$.

Дадим ещё одно определение. Далее для когомологий фиксируем некоторое кольцо коэффициентов $A$.

**Определение.** Пусть $X$ — топологическое пространство, $\iota : U \to X$ — естественное вложение подпространства. Тогда *относительной когомологической длиной* $U$ назовём

$$\operatorname{hl}_X U = \max\{k : \exists u_1, \dots, u_k \in H^*(X, A),\ \forall i\ \dim u_i > 0,\ \iota^*(u_1 u_2 \dots u_k) \neq 0\}.$$

Далее будет показано, что $\operatorname{hl}_X U + 1$ является обобщённой относительной категорией. Также из доказываемого далее свойства субаддитивности длины следует, что $\operatorname{cat}_X U \ge \operatorname{hl}_X U + 1$. На самом деле для любой обобщённой относительной категории $k$, которая равна единице на стягиваемых по $X$ подмножествах, верно что $k(U) \le \operatorname{cat}_X U$.

Заметим также, что для всякого непрерывного отображения $f : X \to Y$ категория сужения отображения, определённая в [2], $f|_U$ является обобщённой относительной категорией. Также для всякого класса когомологий $\xi$ (возможно обобщённых) категория сужения класса (определённая там же) $\xi|_U$ является обобщённой относительной категорией. Для некоторого расслоения $E \to X$ категория сечений (sectional category — обозначение работы [3] $\operatorname{secat} E|_U$, определённая в [4], также является обобщённой относительной категорией.

[1]Исследование выполнено при поддержке РФФИ, грант №06-01-00648

Обзор разных обобщений понятия категории Люстерника-Шнирельмана содержится в [3]. Заметим, что разные варианты понятия *строгой категории* $U$, в которых, в отличие от обычной категории, требуется стягиваемость каждого множества покрытия по себе, не обладает требуемыми свойствами, в частности нарушается свойство 3.

Сформулируем основной результат работы.

**Теорема 1.** *Пусть $X$ — пространство с обобщённой относительной категорией $k$. Пусть также $k(X) > n(d+1)$. Пусть есть непрерывное отображение $f : X \to K$ в конечный $d$-мерный полиэдр (геометрическую реализацию конечного симплициального комплекса) $K$. Тогда найдётся $c \in K$ такая, что для любой окрестности $U \ni c$*

$$k(f^{-1}(U)) > n.$$

В этой теореме можно опустить условие конечности $K$, если $X$ — компактно.

Если $k$ является гомотопическим инвариантом и слой $f^{-1}(c)$ является ретрактом некоторой своей окрестности в $X$, то из теоремы следует, что $k(f^{-1}(c)) > n$. В частности, это выполнено для аналитических функций на вещественно-аналитическом многообразии $X$ и приведённых выше примеров функций $k$.

Если функция $k(U)$ обладает свойством непрерывности (для всякого замкнутого $F \subseteq X$ для некоторой окрестности $U \supset F$ выполняется $k(F) \geq k(U)$ ), то из теоремы следует, что $k(f^{-1}(c)) > n$. Это выполняется, в частности, для рода $G$-действия и для некоторых случаев категории сечений и т. п.

Частный случай теоремы 1 для некоторого аналога рода $Z_2$-действия доказан в [5] (Лемма 3.1), где из него выведено содержательное геометрическое следствие. Для другого аналога рода $Z_p$-пространств этот результат доказан в [6] (Лемма 9.1 и Следствие 9.1). Фактически, в [6] содержится и идея доказательства теоремы 1 для когомологической длины.

Близкий результат получен в работе [7], где отображение должно быть расслоением и в оценке $d+1$ заменено на категорию отображения. Сформулируем его для сравнения:

**Теорема 2.** *Пусть $F \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{p} B$ — расслоение со связными $B$ и $F$. Тогда* $\operatorname{cat} E \leq \operatorname{cat} \iota \cdot \operatorname{cat} p$.

## 2. Свойства рода $G$-действия

Напомним известные свойства рода. Это понятие было введено в [8, 9, 4]. Широкий обзор по разным понятиям рода и когомологическим индексам $G$-действия можно найти в [6].

**Лемма 1.** *Если существует эквивариантное отображение $X \to Y$ между двумя $G$-пространствами, то*

$$g_G(X) \leq g_G(Y).$$

Следующее свойство сразу следует из $k-2$-связности $G^{*k}$ и теории препятствий.

**Лемма 2.** *Для $CW$-комплекса $X$, являющегося свободным $G$-пространством, имеет место неравенство*

$$g_G(X) \leq \dim X + 1.$$

**Лемма 3.** *Для $n-1$-связного свободного $G$-пространства $X$ имеет место неравенство $g_G(X) \geq n+1$.*

И следствие двух предыдущих лемм:

**Лемма 4.** *Пусть $G$ действует на сфере $S^d$ свободно, тогда $g_G(S^d) = d+1$.*

Пусть $\pi : Y \to Y/G$ — естественная проекция пространства со свободным действием $G$. Для величины $g_G(\pi^{-1}(U))$ свойства 1 и 3 обобщённой относительной категории выполняются очевидно.

Субаддитивность следует из того, что $g_G(\pi^{-1}(U))$ является частным случаем категории сечений (см. [4, 3]). Но мы докажем для этой величины свойство, которое сильнее, чем субаддитивность.

**Теорема 3.** *Пусть свободное $G$-пространство $Y$ покрыто открытыми инвариантными подпространствами $\{Y_i\}_{i=1}^l$. Тогда найдётся точка $x \in Y$ такая, что*

$$\sum_{Y_i \ni x} g_G(Y_i) \geq g_G(Y).$$

*Доказательство.* Положим $g_G(Y_i) = k_i$, можно считать, что все эти числа конечны, так как в противном случае утверждение теоремы очевидно. Рассмотрим эквивариантные отображения $f_i : Y_i \to G^{*k_i}$, которые существуют по определению рода.

Рассмотрим также инвариантное разбиение единицы $\{\rho_i\}_{i=1}^l$, подчинённое покрытию $\{Y_i\}$. Тогда отображение

$$f : x \mapsto \rho_1(x)f_1(x) \oplus \cdots \oplus \rho_l(x)f_l(x)$$

даёт эквивариантное отображение $Y$ в джойн $G^{*(k_1+\cdots+k_l)}$. При этом, если теорема неверна, то образ этого отображения лежит в $(g_G(Y)-2)$-мерном остове симплициального комплекса $G^{*(k_1+\cdots+k_l)}$, что противоречит монотонности рода и лемме 2. $\square$

Кроме того, эта теорема даёт известную из [8, 4] оценку $\operatorname{cat} Y/G \geq g_G(Y)$, так как если $X = Y/G$ покрыто замкнутыми множествами $U_1, \ldots, U_n$ и $\forall i\ \operatorname{cat}_X U_i = 0$, то прообразы $\pi^{-1}(U_i)$ будут иметь род 1, и тогда по теореме 3 будем иметь $g_G(Y) \leq n$.

## 3. Свойства когомологической длины

Когомологическая длина — один из наиболее распространённых способов оценки категории Люстерника-Шнирельмана. Сформулируем нужную нам лемму из [10], которую также можно найти в [3].

**Лемма 5.** *Пусть пространство $X$ покрыто семейством открытых множеств $U_1, U_2, \ldots, U_m$ и даны элементы $a_1, a_2, \ldots, a_m \in H^*(X, A)$. Если для каждого $i = 1, \ldots, m$ образ $a_i$ в $H^*(U_i, A)$ нулевой, то произведение $a_1a_2\cdots a_m = 0$ в $H^*(X, A)$.*

Из этой леммы сразу следует выполнение свойства 2 обобщённой относительной категории для числа $\operatorname{hl}_X U$. Действительно, если некоторое произведение $N = \sum_{i=1}^n \operatorname{hl}_X U_i + n$ классов положительной размерности $u_1, \ldots, u_N \in H^*(X, A)$ не обращается в нуль на $\bigcup_{i=1}^n U_i$, то это произведение можно разбить на $n$ отрезков длин $\operatorname{hl}_X U_i + 1$ соответственно. По лемме 5, один из отрезков произведения не сможет обратиться в нуль на соответствующем $U_i$, что противоречит определению длины $U_i$.

Свойства 1 и 3 для когомологической длины очевидны.

## 4. Лемма о покрытии

**Лемма 6.** *У всякого конечного $d$-мерного полиэдра $K$ существует открытое покрытие $\mathcal{U}$ сколь угодно малой мелкости, которое можно представить в виде объединения семейств*

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{d+1} \mathcal{U}_i,$$

*где каждое семейство $\mathcal{U}_i$ состоит из множеств с попарно непересекающимися замыканиями.*

*Доказательство.* Рассмотрим достаточно мелкое разбиение $K$. Далее возьмём барицентрическое подразделение $K'$ этого комплекса — его вершины соответствуют симплексам исходного, значит размерности исходных симплексов дают правильную раскраску вершин комплекса $K'$ в $d+1$ цвет. Здесь правильная раскраска — это раскраска, при которой вершины любого симплекса раскрашены в попарно различные цвета.

Теперь двойственное к $K'$ клеточное разбиение $K$, образованное звёздами вершин $K'$ в следующем барицентрическом подразделении $K''$, даёт нам как раз покрытие $K$ мелкими замкнутыми множествами, разбитыми на $d+1$ группу так, что множества из одной группы не пересекаются.

Далее от замкнутого покрытия можно перейти и к открытому. $\square$

## 5. Доказательство теоремы 1

По лемме 6 покроем $K$ достаточно мелким покрытием $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_{d+1}$, разбитым на $d+1$ дизъюнктное покрытие. Обозначим $V_i = \bigcup \mathcal{U}_i$.

По свойству 2 обобщённой относительной категории для некоторого $i$ $k(f^{-1}(V_i)) > n$. По свойству 3 найдётся мелкое множество $V \in \mathcal{U}_i$, для которого $k(f^{-1}(V)) > n$.

Рассматривая все более мелкие разбиения мы будем находить все более мелкие множества $V$, по соображениям компактности можно считать, что все они стремятся к некоторой точке $c \in K$. Покажем, что

$c$ является нужной точкой от противного. Если найдётся окрестность $U \ni c$, для которой $k(f^{-1}(U)) \leq n$, то для достаточно мелкого покрытия будет $V \subseteq U$, значит получаем противоречие со свойством 1.

## 6. Некоторые следствия

Сформулируем некоторые следствия из теоремы 1. На самом деле эти следствия вытекают уже из версии теоремы 1, известной Янгу [5].

**Следствие 1 (Обобщение теоремы Борсука-Улама).** *Пусть даны натуральные числа $k, l, n$, причём $k(l+1) \leq n$. Тогда для любых $l$ непрерывных чётных функций на сфере $S^n$ $(f_1, \ldots, f_l)$ найдутся такие числа $(c_1, \ldots, c_l)$, что для любых $k$ непрерывных нечётных функций $(g_1, \ldots, g_k)$ система*

$$f_1(x) = c_1, \ f_2(x) = c_2, \ldots, f_l(x) = c_l$$
$$g_1(x) = 0, \ g_2(x) = 0, \ldots, g_k(x) = 0$$

*имеет решение.*

*Доказательство.* По лемме 4, $Z_2$-род $S^n$ при действии $x \mapsto -x$ равен $n+1$. Применим теорему 1 к отображению $f : S^n \to \mathbb{R}^l$, задаваемому функциями $(f_1, \ldots, f_l)$. Тогда мы найдём такой набор $(c_1, \ldots, c_l)$, что подмножество $S^n$ (см. комментарий после теоремы 1)

$$Y = \{x \in S^n : f_1(x) = c_1, \ f_2(x) = c_2, \ldots, f_l(x) = c_l\}$$

имеет род не менее $k$. Аналогично доказательству обычной теоремы Борсука-Улама, из леммы 4 и свойства монотонности рода следует, что любой набор нечётных функций $(g_1, \ldots, g_k)$ имеет нуль на $Y$, что и требовалось доказать. □

Можно также сформулировать следствие из этого обобщения теоремы Борсука-Улама, которое получается, если функции $(g_1, \ldots, g_k)$ брать линейными.

**Следствие 2.** *Пусть даны натуральные числа $k, l, n$, причём $k(l+1) \leq n$. Тогда для любых $l$ непрерывных чётных функций $(f_1, \ldots, f_l)$ на сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ найдутся такие числа $(c_1, \ldots, c_l)$, что множество*

$$Y = \{x \in S^n : f_1(x) = c_1, \ f_2(x) = c_2, \ldots, f_l(x) = c_l\}$$

*пересекается с любым линейным подпространством $\mathbb{R}^{n+1}$ размерности $n+1-k$.*

## Литература

1. L.A. Lusternik, L.G. Schnirelmann. Méthodes topologiques dans le problèmes variationnels. Paris: Hermann, 1934

2. I. Berstein, T. Ganea. The category of a map and of a cohomology class. // Fundam. Math., 50, 1961, 265–279

3. I.M. James. On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann. // Topology, 17, 1978, 331–348

4. A.S. Schwarz. The genus of a fibre space. // Amer. Math. Soc. Transl., 55, 1966, 49–140

5. C.-T. Yang. On Theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobo and Dyson, II. // The Annals of Mathematics, 2nd Ser., 62(2), 1955, 271–283

6. А.Ю. Воловиков. Точки совпадения отображений $\mathbb{Z}_p^n$-пространств. // Изв. РАН.: Сер. матем., 69(5), 2005, 53–106

7. K. Varadarajan. On fibrations and category. // Mathematische Zeitschrift, 88, 1965, 267–273

8. M.A. Krasnosel'skii. On special coverings of a finite-dimensional sphere. // Dokl. Akad. Nauk SSSR, 103, 1955, 961–964

9. C.-T. Yang. Continuous Functions From Spheres to Euclidean Spaces. // The Annals of Mathematics, 2nd Ser., 62(2), 1955, 284–292

10. S. Froloff, L. Elsholz. Limite inférieure pour le nombre des valeurs critiques d'une fonction, donné sur une variete. // Math. Sbornik, 42(5), 1935, 637–643