Модел. и анализ информ. систем. Т.**13**, №**2** (2006) 66–70

УДК 517.14

Раскрашенная версия леммы Кнастера-Куратовского-Мазуркевича

Карасёв Р.Н. [1]

Московский Физико-технический институт
e-mail: r_n_karasev@mail.ru

получена 22 сентября 2006

Аннотация

В данной работе доказывается обобщение леммы Кнастера-Куратовского-Мазуркевича и выводится несколько следствий, обобщающих теорему о неподвижной точке. Также доказывается еще одно обобщение теоремы о неподвижной точке и из него выводится раскрашенная теорема Хелли.

1. Введение и формулировка результатов

В данной работе доказывается обобщение леммы Кнастера-Куратовского-Мазуркевича (ККМ) для нескольких семейств множеств.

Теорема 1 является обобщением результатов [1] на случай, когда количество семейств множеств не равно количеству множеств в семействах. В данной работе также выводится некоторое обобщение теоремы о неподвижной точке для семейства отображений симплекса в себя. В отличие от работы [1], в которой доказывается соответствующее обобщение леммы Шпернера о триангуляциях симплекса, в данной работе обобщение леммы ККМ выводится из топологических соображений, аналогично доказательству собственно леммы ККМ в [4].

Теорему 1 можно назвать "раскрашенным" вариантом леммы ККМ, в духе раскрашенных теорем Каратеодори, Хелли, Тверберга из работ [2, 3]. Также в работе доказывается близкая к теореме 1 по духу и по способу доказательства теорема 5, которая в некотором смысле является "раскрашенным" вариантом теоремы о неподвижной точке и из этой теоремы выводится раскрашенная теорема Хелли.

Сформулируем основные результаты работы. Будем обозначать множество индексов $\{1, 2, \dots, k\} = [k]$.

Теорема 1. *Пусть дано множество X из n точек в $\mathbb{R}^d$ и множество индексов $[m]$, где $m \geq n$. Пусть $A(x, j)$, где $x \in X$, $j \in [m]$ — семейство замкнутых множеств, для которого*

$$\forall j \in [m]\ \forall Y \subseteq X\ \ \operatorname{conv} Y \subseteq \bigcup_{x \in Y} A(x, j).$$

Пусть каждому $x \in X$ сопоставлено натуральное число $a(x)$ так, что $\sum_{x \in X} a(x) = m$. Тогда найдется такое отображение множества индексов $\sigma : [m] \to X$, что

$$\forall x \in X\ |\sigma^{-1}(x)| = a(x) \quad \text{и} \quad \bigcap_{j=1}^{m} A(\sigma(j), j) \neq \emptyset.$$

Теорема 1 для случая $m = n$ сформулирована и доказана в [1].

Сформулируем также еще один вариант раскрашенной леммы ККМ, являющийся обобщением лемм, использованных автором в [5, 6]:

Теорема 2. *Пусть S — симплекс в $\mathbb{R}^d$ с множеством гиперграней $\{F_i\}_{i=1}^{d+1}$. Пусть A_{ij}, где $i \in [d+1]$, $j \in [m]$ $(m \geq d+1)$ — семейство замкнутых подмножеств S, для которого*

$$\forall j\ \forall i\ A_{ij} \supseteq F_i \quad \forall j\ \bigcup_i A_{ij} = S.$$

[1]Исследование выполнено при поддержке РФФИ, гранты №03-01-00801 и №06-01-00648, и при поддержке гранта Президента РФ МК-5724.2006.1

Пусть дано $d+1$ натуральное число $a_1, a_2, \dots, a_{d+1}$, где $\sum_i a_i = m$. Тогда найдется такое отображение множества индексов $\sigma : [m] \to [d+1]$, что

$$\forall i \in [d+1]\ |\sigma^{-1}(i)| = a_i \quad и \quad \bigcap_{j=1}^{m} A_{\sigma(j)j} \neq \emptyset.$$

Приведем два следствия вышеуказанных теорем. Эти следствия дают теорему о неподвижной точке, если все отображения f_j в их формулировке одинаковые. Кроме того, они дают частные случаи результатов автора из [6] (теоремы 1 и 2), если все отображения в их формулировке константные.

Следствие 3. *Пусть S — симплекс в $\mathbb{R}^d$ с множеством гиперграней $\{F_i\}_{i=1}^{d+1}$. Пусть заданы $m \geq d+1$ непрерывных отображений $f_j : S \mapsto S$. Пусть дано $d+1$ натуральное число $a_1, a_2, \dots, a_{d+1}$, где $\sum_i a_i = m$. Тогда найдется такое отображение множества индексов $\sigma : [m] \to [d+1]$ и точка $x \in S$, что*

$$\forall i \in [d+1]\ |\sigma^{-1}(i)| = a_i \quad \forall j \in [m]\ x \in \operatorname{conv}(\{f_j(x)\} \cup F_{\sigma(j)}).$$

Следствие 4. *Пусть S — симплекс в $\mathbb{R}^d$ с множеством гиперграней $\{F_i\}_{i=1}^{d+1}$. Пусть заданы $m \geq d+1$ непрерывных отображений $f_j : S \mapsto S$. Пусть дано $d+1$ натуральное число $a_1, a_2, \dots, a_{d+1}$, где $\sum_i a_i = m$. Тогда найдется такое отображение множества индексов $\sigma : [m] \to [d+1]$ и точка $x \in S$, что*

$$\forall i \in [d+1]\ |\sigma^{-1}(i)| = a_i \quad \forall j \in [m]\ f_j(x) \in \operatorname{conv}(\{x\} \cup F_{\sigma(j)}).$$

Метод доказательства теоремы 1 можно также применить в доказательстве следующего утверждения:

Теорема 5. *Пусть в $\mathbb{R}^d$ даны $d+1$ конечное семейство открытых множеств $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, \dots, d+1)$, причем каждое семейство покрывает $\mathbb{R}^d$ и существует отображение $n : \bigcup_i \mathcal{F}_i \to S^{d-1}$ в единичную сферу S^{d-1} в $\mathbb{R}^d$ такое, что*

$$\forall U \in \bigcup_i \mathcal{F}_i \ \inf_{u \in U} (u, n(U)) > -\infty.$$

Пусть также даны $d+1$ отображение $f_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ такие, что все отображения $x \mapsto f_i(x) - x$ ограничены.

Тогда найдется точка $x \in \mathbb{R}^d$ и система представителей $U_i \in \mathcal{F}_i$ такие, что

$$\forall i = 1, \dots, d+1\ f_i(x) \in U_i \quad и \quad 0 \in \operatorname{conv}\{n(U_1), \dots, n(U_{d+1})\}.$$

Из теоремы 5 можно вывести раскрашенную теорему Хелли.

Теорема 6 (Раскрашенная теорема Хелли). *Если в $d+1$ конечном семействе выпуклых множеств $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, \dots, d+1)$ каждое семейство не имеет общей точки, то найдется система представителей $K_i \in \mathcal{F}_i$, для которой*

$$\bigcap_{i=1}^{d+1} K_i = \emptyset.$$

2. Доказательства

Лемма 7 (Лемма Холла). *Пусть в двудольном графе множеством вершин разбито на $V \cup W$, где $|V| = n$, $|W| = m$ $(m \geq n)$, и дано отображение $a : V \mapsto \mathbb{N}$, где $\sum_{v \in V} a(v) = m$. Пусть для любого непустого $V' \subseteq V$ множество вершин из W, соединенных хоть с одной вершиной из V' имеет мощность не менее $\sum_{v \in V'} a(v)$. Тогда найдется отображение $\sigma : W \mapsto V$ такое, что $\forall w \in W$ $(w, \sigma(w))$ является ребром и $\forall v \in V$ $|\sigma^{-1}(v)| = a(v)$.*

Лемма является следствием обычной леммы Холла, если каждую вершину $v \in V$ превратить в $a(v)$ ее клонов.

Сформулируем и докажем частный случай теоремы 1, из которого можно вывести общий случай.

Лемма 8. *Пусть S — симплекс в $\mathbb{R}^d$ с множеством гиперграней $\{F_i\}_{i=1}^{d+1}$. Пусть A_{ij}, где $i \in [d+1]$, $j \in [m]$ $(m \geq d+1)$ — семейство замкнутых подмножеств S, для которого*

$$\forall j\ \forall i\ A_{ij} \cap F_i = \emptyset \quad \forall j \bigcup_i A_{ij} = S.$$

Пусть дано $d+1$ натуральное число $a_1, a_2, \dots, a_{d+1}$, где $\sum_i a_i = m$. Тогда найдется такое отображение множества индексов $\sigma : [m] \to [d+1]$, что

$$\forall i \in [d+1]\ |\sigma^{-1}(i)| = a_i \quad \bigcap_{j=1}^{m} A_{\sigma(j)j} \neq \emptyset.$$

Доказательство леммы 8. Возьмем $\varepsilon > 0$, не превосходящее всех расстояний $\operatorname{dist}(A_{ij}, F_i)$. Рассмотрим для каждого A_{ij} непрерывную функцию $\chi_{ij} : S \mapsto [0,1]$ такую, что $\chi_{ij}(x) = 1$ для $x \in A_{ij}$ и $\chi_{ij(x)=0}$, если $\operatorname{dist}(x, A_ij) \geq \varepsilon$.

Положим

$$\phi_{ij}(x) = \frac{\chi_{ij}(x)}{\sum_{i' \in [d+1]} \chi_{i'j}(x)},$$

определение корректно, так как $\bigcup_i A_{ij} = S$ и знаменатель не обращается в 0.

Определим

$$\phi_i(x) = \frac{\sum_{j \in [m]} \phi_{ij}(x)}{m}.$$

Если рассматривать $\phi_i(x)$ как барицентрические координаты точки в симплексе S', то можно видеть, что ϕ_i задают отображение $\phi : S \mapsto S'$, причем легко проверить, что ϕ отображает $\operatorname{bd} S$ в $\operatorname{bd} S'$ и степень этого отображения равна 1 (оно гомотопно стандартному отображению S в S', не меняющему барицентрические координаты). Следовательно, отображение $\phi : S \mapsto S'$ сюръективно и найдется точка $x \in S$ такая, что

$$\forall i \in [d+1]\ \phi_i(x) = a_i/m.$$

Рассмотрим матрицу $M = (\phi_{ij}(x))_{i \in [d+1]\ j \in [m]}$. Построим двудольный граф, множество вершин которого — это объединение множества столбцов $[m]$ и множества $[d+1]$ строк матрицы M. Соединим строку i со столбцом j, если $\phi_{ij}(x) > 0$. Так как в матрице суммы в строках равны соответственно a_i, суммы в каждом столбце равны 1, то очевидно, этот граф удовлетворяет условию леммы Холла и существует $\sigma : [m] \mapsto [d+1]$ для которой $|\sigma^{-1}(i)| = a_i\ \phi_{\sigma(i)i}(x) > 0$. Это означает, что для множеств

$$A_{ij}(\varepsilon) = \{a \in S : \operatorname{dist}(x, A_{ij}) \leq \varepsilon\}$$

выполняется

$$\bigcap_{j=1}^{m} A_{\sigma(j)j}(\varepsilon) \ni x.$$

Устремляя ε к нулю и используя стандартные рассуждения, связанные с компактностью S и конечностью числа возможных отображений $\sigma(\varepsilon)$, получаем утверждение теоремы. □

Так же, как и в конце предыдущего доказательства, в доказательствах теорем 1 и 2 мы будем пользоваться следующим приемом. Если вместо множеств A из формулировки мы будем рассматривать $A(\varepsilon) = \{x : \operatorname{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}$ и докажем утверждения для новых множеств при любых положительных ε, то исходное утверждение для $\varepsilon = 0$ будет следовать из стандартных соображений компактности.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим афинное отображение f стандартного $n-1$-мерного симплекса S в $\mathbb{R}^d$, переводящее вершины S в точки множества X. Рассмотрим прообразы $A'(x,j) = f^{-1}(A(x,j))$ – это замкнутые множества. Для доказательства теоремы нам достаточно доказать, что для некоторого отображения $\sigma : [m] \to X$ с заданным числом прообразов каждой точки имеем

$$\bigcap_{j=1}^{m} A'(\sigma(j), j) \neq \emptyset.$$

Множество вершин симплекса S для краткости будем также обозначать X.

Теперь чтобы применить лемму 8 нам надо сделать так, чтобы $A'(x,j)$ не пересекалось с гипергранью S, противоположной x. Возьмем достаточно малое ε' и вычтем из $A'(x,j)$ открытую ε'-окрестность гиперграни, противоположной вершине x, получив множество $A''(x,j)$. Покажем, что при достаточно малом ε' для каждого $j \in [m]$ множества $\{A''(x,j)\}_{x \in X}$ покрывают S. Предположим противное: пусть для некоторого $j \in [m]$ какая-то точка p не покрывается ни одним из $A''(x,j)$ при любых ε'. Пусть p лежит в относительной внутренности грани S, вершины которой образуют множество Y или p совпадает с некоторой вершиной $y \in X$, тогда обозначим $Y = \{y\}$. Легко видеть, что для достаточно малого ε' $\operatorname{conv} Y \subseteq \bigcup_{x \in Y} A''(x,j)$, таким образом получается противоречие.

Применяя лемму 8 к симплексу S и множествам $A''(x,j)$, получаем требуемое утверждение. □

Доказательство теоремы 2. Пусть $\{v_i\}_{i=1}^{d+1}$ — множество вершин S, соответственно противоположных граням $\{F_i\}_{i=1}^{d+1}$. По замечанию выше достаточно доказать для множеств $A_{ij}(\varepsilon)$. Тогда мы можем вычесть из $A_{ij}(\varepsilon)$ шар радиуса $\varepsilon/2$ с центром в v_i, тогда условие $\bigcup_{i=1}^{d+1} A_{ij}(\varepsilon) = S$ не нарушится, так как эта окрестность вершины v_i покрыта $A_{i'j}(\varepsilon)$ для любого $i' \neq i$. Поэтому далее значок ε мы опускаем и считаем $A_{ij} \not\ni v_i$.

Поместим симплекс S в больший симплекс S_1 так, что вершины S попадут в середины граней. Пусть грань F_i симплекса S соответствует при этом вершине w_i симплекса S_1. Если мы рассмотрим звезду вершины w_i в барицентрическом подразделении S_1 и обозначим ее B_i, то множества $A'_{ij} = A_{ij} \cup (B_i \setminus S)$ будут удовлетворять условиям леммы 8. Значит для соответствующего $\sigma : [m] \mapsto [d+1]$

$$\bigcap_{j=1}^{m} A'_{\sigma(j)j} \neq \emptyset.$$

Заметим, что это пересечение обязано лежать в S, значит

$$\bigcap_{j=1}^{m} A_{\sigma(j)j} \neq \emptyset.$$

□

Доказательство следствия 3. Предположим, что начало координат лежит в S и рассмотрим отображения $f_j(x, \varepsilon) = (1-\varepsilon) f_j(x)$. Если для каждого ε из некоторой последовательности $\varepsilon \to 0$ утверждение будет верно, то оно будет верно и для $\varepsilon = 0$. Действительно, переходя к подпоследовательности мы можем считать, что отображение σ не зависит от ε и $x(\varepsilon) \to x$.

Далее рассматриваем случай $f_j(S) \in \operatorname{int} S$ для всех $j \in [m]$. Положим

$$A_{ij} = \{x : x \in \operatorname{conv}(\{f_j(x)\} \cup F_i)\}.$$

Эти множества удовлетворяют условиям теоремы 2, которая дает в точности требуемое утверждение. □

Доказательство следствия 4. Аналогично предыдущему, рассматриваем случай $f_j(S) \in \operatorname{int} S$ для всех $j \in [m]$. Положим

$$A_{ij} = \{x : x \in \operatorname{conv}(\{f_j(x)\} \cup F_i)\}.$$

Эти множества удовлетворяют условиям теоремы 1, которая дает в точности требуемое утверждение. □

Доказательство теоремы 5. Обозначим $\mathcal{F} = \bigcup_i \mathcal{F}_i$.

Сначала заменим каждое множество U семейства $\mathcal{F}$ открытым множеством V, таким что $\operatorname{cl} V \subseteq U$ и каждое новое семейство $\mathcal{F}_i$ все еще покрывает $\mathbb{R}^d$. Далее будем работать с новыми семействами.

По условию теоремы существует положительная константа C, такая что

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \ \forall i = 1, \ldots, d+1 \ |f_i(x) - x| \leq C \quad \text{и} \quad \forall U \in \mathcal{F} \ \forall u \in U \ (u, n(U)) \geq -C.$$

Теперь найдем для всякого $U \in \mathcal{F}$ неотрицательную гладкую функцию $\phi_U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, такую что $U = \{x : \phi_U(x) > 0\}$. Из соображений общего положения можно выбрать все функции ϕ_U так, что для любых $U, V \in \mathcal{F}_i$ множество $\{x : \phi_U(x) = \phi_V(x) > 0\}$ является многообразием коразмерности 1 в $\mathbb{R}^d$.

Теперь рассмотрим для всякого $i \in 1, \ldots, d+1$ и каждой точки x набор значений $\phi_U(x)$ и расположим его по убыванию. Второе их этих значений назовем $\psi_i(x)$, оно существует, так как в каждом $\mathcal{F}_i$ не менее двух элементов. Функция $\psi_i(x)$ очевидно непрерывна и для всякого $i = 1, \ldots, d+1$ и $U \in \mathcal{F}_i$ функция

$$\chi_U(x) = \max\{\phi_U(x) - \psi_i(x), 0\}$$

непрерывна. Заметим, что для всякого $i = 1, \ldots, d+1$ и всякой точки x не более чем одна из функций $\chi_U(x)$ $(U \in \mathcal{F}_i)$ отлична от нуля и множество точек, в которых они все равны нулю (обозначим это множество Z_i) является объединением многообразий коразмерности 1.

Теперь пошевелим отображения f_i не более чем на ε так, чтобы образ отображения $f = f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_{d+1} : (R^d)^{d+1} \to (R^d)^{d+1}$ не задевал $Z_1 \times Z_2 \times \ldots \times Z_{d+1}$. Это можно сделать из соображений размерности. Будем также считать, что определенная в начале доказательства константа C не изменилась при шевелении.

Рассмотрим для всех $U \in \mathcal{F}$ полупространства $H_U = \{x : (x, n(U)) \geq -2C\}$ и их границы гиперплоскости h_U. Теперь рассмотрим шар B в $\mathbb{R}^d$ с центром в нуле и радиусом настолько большим, что все непустые пересечения любого количества гиперплоскостей h_U пересекаются с B; границу B обозначим S.

Рассмотрим отображение

$$f(x) = \sum_{U \in \mathcal{F}} \chi_U(x) n(U).$$

Докажем, что это для некоторого $x \in B$ $f(x) = 0$. Предположим, что это не так, тогда отображение f отображает S в $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, причем если для любого $x \in S$ вектор $f(x)$ не противоположен x, то степень отображения $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ равна единице и какая-то точка x все же отображается в нуль. Значит мы должны предположить, что для некоторого x вектор $\sum_{U \in \mathcal{F}} \chi_U(x) n(U)$ ему противоположен. Пусть для этого x $\mathcal{G} = \{U \in \mathcal{F} : \chi_U(x) > 0\}$, тогда для всякого $U \in \mathcal{G}$ $x \in H_U$ и перейдя в линейную оболочку векторов $\{n(U)\}_{U \in \mathcal{G}}$, в которой также находится и x мы получаем противоречие с выбором B, так как скалярное произведение $(x, \cdot)$ ограничено на $\bigcap_{U \in \mathcal{G}} H(U)$ и обязано принимать на этом множестве максимум, точка этого максимума не лежит в B и лежит в некотором пересечении h_U, не пересекающимся с B — противоречие с выбором B.

Точка x, для которой $f(x) = 0$ дает нам в каждом семействе $\mathcal{F}_i$ не более одного U_i, для которого $\chi_{U_i}(x) > 0$ и выпуклая оболочка соответствующих $n(U_i)$ содержит 0. Дополнив эту систему представителей до полной мы получим утверждение, требуемое в теореме для данных f_i.

Теперь вспомним, что нам пришлось пошевелить отображения f_i. Для каждого шевеления у нас найдется некоторая система представителей (их конечное число) и $x \in B$ (это компактное множество), удовлетворяющие условию теоремы, тогда из стандартных соображений компактности для любых функций f_i теорема верна с заменой условия $f_i \in U_i$ на $f_i \in \operatorname{cl} U_i$, но так как в самом начале доказательства мы уменьшили множества U так, чтобы замыкания новых содержались в старых множествах, то теорема доказана во всех случаях. □

Доказательство раскрашенной теоремы Хелли через теорему 5. Заметим, что эту теорему достаточно доказать для случая, когда все выпуклые множества в формулировке замкнутые и более того, можно считать, что все они — замкнутые полупространства.

Действительно, с помощью стандартных рассуждений с двойственностью можно показать, что если семейство замкнутых выпуклых множеств имеет пустое пересечение, то каждое из этих множеств можно поместить в полупространство так, что семейство полупространств имеет пустое пересечение.

Теперь возьмем для каждого полупространства H из наших семейств его дополнение U, задаваемое неравенством $(n(U), x) > c(U)$. Составленные из этих U семейства $\mathcal{G}_i$ покрывают все пространство, так как исходные $\mathcal{F}_i$ не имели общей точки. Применим к этим $\mathcal{G}_i$, их $n(U)$ и функциям $f_i(x) \equiv x$ теорему 5. Получим, что некоторая система представителей $U_i \in \mathcal{G}_i$ имеет непустое пересечение и их нормали $n(U_i)$ содержат нуль в своей выпуклой оболочке. Тогда семейство соответствующих H_i будет иметь пустое пересечение, что и требовалось. □

3. Заключение

Автор выражает признательность В.Л. Дольникову за указание на то, что лемму из работ [5, 6] можно попытаться обобщить до раскрашенного аналога леммы ККМ.

Список литературы

1. Bapat, R.B. A constructive proof of a permutation-based generalization of Sperner's lemma // Mathematical Programming, 44, 1989, 113–120

2. Barany, I. A generalization of Carathéodory's theorem // Discrete Math., 40, 1982, 141–152

3. Barany, I. and Larman, D.G. A colored version of Tverberg's theorem. // J. London Math. Soc., 45(2), 1992, 314–320

4. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. Москва. Мир. 1977, с. 26

5. Karasev, R.N. On a conjecture of A. Bezdek. // Discrete and Computational Geometry, 27(3), 2002, 419–439

6. Karasev, R.N. Partitions of a polytope and mappings of a point set to facets // Discrete and Computational Geometry, 34(1), 2005, 25–45