Модел. и анализ информ. систем. Т.**11**, №**2** (2004) 32–36

УДК 681.3

О разных усилениях понятия выпуклости

Карасёв Р.Н. [1]
Московский Физико-технический институт
e-mail: r_n_karasev@mail.ru

получена 15 сентября 2004

Аннотация

В этой работе рассматриваются два возможных усиления понятия выпуклости множества, обобщающие сильную выпуклость с радиусом R. Дается пример, показывающий, что в общем случае они не эквивалентны и дается достаточное условие их эквивалентности.

1. Введение

В этой работе приводятся результаты, связанных с понятием сильной выпуклости и порождающего множества. M-сильная выпуклость, определенная для любого замкнутого выпуклого множества M, является некоторым усилением понятия выпуклости, также в этой работе будет рассмотрено еще одно усиление понятие выпуклости, M-выпуклость.

Кроме того, нам понадобится понятие порождающего множества, так как нас будет интересовать случай сильной выпуклости, когда множество M — порождающее. Это понятие явно или неявно использовалось в работах [5, 3, 6, 7], при этом в работах [5, 3] было сформулировано собственно определение порождающего множества.

Введем некоторые обозначения, которые мы будем использовать:

1. $\operatorname{cl} X$, $\operatorname{int} X$, $\operatorname{bd} X$ — замыкание, внутренность и граница множества X, которое является подмножеством некоторого топологического пространства.

2. $\operatorname{conv} V$, $\operatorname{lin} V$, $\operatorname{aff} V$ — выпуклая, линейная, аффинная оболочка множества V, являющегося подмножеством некоторого линейного пространства.

3. Сумма Минковского непустых множеств A и B, которые являются подмножествами некоторого линейного пространства:
$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$
Если множество B состоит из одной точки b, то будем для краткости обозначать
$$A + \{b\} = A + b.$$

4. Геометрическая разность двух непустых множеств A и B, которые являются подмножествами некоторого линейного пространства:
$$A \overset{*}{-} B = \bigcap_{b \in B} (A - b)$$
или, эквивалентно,
$$A \overset{*}{-} B = \{c : B + c \subseteq A\}.$$

5. $\langle l, x \rangle$ — значение на векторе $x \in L$ линейного функционала $l \in L^*$. Здесь L — некоторое линейное пространство. Для $L = \mathbb{R}^n$ пространство L^* также отождествляется с $\mathbb{R}^n$.

6. (x, y) — скалярное произведение векторов в пространстве со скалярным произведением. Будем считать, что в $\mathbb{R}^n$ задано скалярное произведение $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 03-01-00801 и 03-01-06207)

Все выпуклые множества в теоремах и определениях будем считать замкнутыми, если не упомянуто противное.

Во всех дальнейших теоремах E — рефлексивное банахово пространство, в частности это может быть конечномерное или гильбертово пространство.

Введем несколько определений, следуя работе [5].

Определение. Пусть $M \subset E$ — выпуклое множество. Множество $A \subset E$ называется *M-сильно выпуклым*, если оно является пересечением некоторого множества транслятов M, то есть $A = \bigcap_{t \in T}(M + t)$, где $T \subset E$.

Определение. Выпуклое множество $M \subset E$ называется *порождающим*, если для любого множества $T \subset E$, для которого $Y = \bigcap_{t \in T}(M + t)$ не пусто, найдется такое выпуклое множество Y^*, что $Y + Y^* = M$.

Как показано в работе [5], именно свойство множества M быть порождающим позволяет доказать аналоги многих свойств обычной выпуклости для сильной выпуклости.

Такое понятие выпуклости естественно приводит к определению выпуклой (сильно выпуклой) оболочки (см. [5]):

Определение. Пусть множество $S \subset E$ таково, что $M \overset{*}{-} S \neq \emptyset$. Тогда *$M$-выпуклой оболочкой* множества S называется множество

$$\bigcap_{t \in M \overset{*}{-} S} (M - t).$$

Мы будем обозначать его $\operatorname{conv}_M S$.

Замечание. Иначе говоря, $\operatorname{conv}_M S$ — это пересечение всех транслятов M, содержащих S. Также имеет место формула

$$\operatorname{conv}_M S = M \overset{*}{-} (M \overset{*}{-} S).$$

Можно заметить, что M-выпуклая оболочка является наименьшим по включению M-сильно выпуклым множеством, содержащим S.

В [2] приведено еще одно усиление понятия выпуклости, целью данной работы является сравнить его с определением сильной выпуклости:

Определение. Пусть $M \subset E$ — выпуклое множество. Множество $A \subset E$ называется *M-выпуклым*, если для любых двух точек $a, b \in A$ множество $\operatorname{conv}_M\{a, b\}$ определено и $\operatorname{conv}_M\{a, b\} \subseteq A$.

Данная работа посвящена сравнению этих определений, в частности будут доказаны теоремы:

Теорема 1. *Пусть дано множество $M \subset E$, не обязательно порождающее. Тогда любое M-сильно выпуклое множество является M-выпуклым.*

Теорема 2. *Пусть множество $M \subset E$ является порождающим, а множество A — M-выпуклым. Если $\operatorname{int} b(A) \neq \emptyset$, то A M-сильно выпукло. Если M ограничено, то условие $\operatorname{int} b(A) \neq \emptyset$ выполняется для любого M-выпуклого A.*

Эти теоремы позволяют, при условии, что множество M порождающее и ограниченное, распространить определение M-сильно выпуклого множества на незамкнутые выпуклые множества, так как, очевидно, в определении M-выпуклого множества можно вообще избавиться от требования замкнутости.

Также в этой работе будет дан пример M-выпуклого множества, которое не является M-сильно выпуклым. Множество M при этом ограничено, но не является порождающим.

Следующее утверждение было доказано в [7] в другой формулировке, мы сформулируем его с использованием определения порождающего множества:

Теорема 3. *Любое выпуклое множество $M \subset \mathbb{R}^2$ является порождающим.*

Поэтому, как уже было отмечено в [2], из результатов этой статьи в частности следует, что в двумерном случае определения M-выпуклости и M-сильной выпуклости эквивалентны.

2. Вспомогательные факты

Сформулируем некоторые вспомогательные факты и определения, необходимые при доказательстве наших теорем.

Определение. Выпуклое множество Y называется *слагаемым* множества X, если найдется такое выпуклое Y^*, что $Y + Y^* = X$.

Если $Y + Y^* = X$, то $X = \cup_{y^* \in Y^*}(Y + y^*)$, то есть X является объединением транслятов Y. Верно и обратное: если множество X выпукло и $X = \cup_{z \in Z}(Y + z)$, то взяв $Y^* = \operatorname{conv} Z$, получим $X = Y + Y^*$. Следовательно, чтобы установить, что Y — слагаемое X, достаточно проверить, покрывают ли те трансляты Y, которые содержатся в X, все множество X.

Определение. *Опорной функцией* множества X называется функция вектора $p \in E^*$, определяемая как

$$s(p, X) = \sup_{x \in X} \langle p, x \rangle.$$

Сформулируем понятия, необходимые для работы с неограниченными выпуклыми множествами.

Определение. *Барьерным конусом* множества X называется

$$b(X) = \{p \in E^* : s(p, X) < +\infty\}.$$

Лемма 1. *Пусть X — выпуклое множество и $p \in \operatorname{int} b(X)$. Тогда множество*

$$X_{p,a} = \{x \in X : \langle p, x \rangle \geq a\}$$

ограничено.

Доказательство. По условию, найдется некоторое открытое множество $U \subseteq E^*$ такое, что $p \in U$ и $U \subseteq b(X)$. Так как при этом очевидно $-p \in b(X_{p,a})$, то $U - p \subseteq b(X_{p,a})$ и при этом $U - p$ — окрестность нуля. Это означает, что $\langle p', x \rangle$ ограничено на X_{pa} при любом p'. По известной теореме (теорема 3.18 из [8]) отсюда следует ограниченность $X_{p,a}$. □

Приведем еще три известных леммы, которые также можно найти в [5].

Лемма 2. *Если $\operatorname{int} b(X) \neq \emptyset$, то для любой точки $y \notin X$ найдется $p \in \operatorname{int} b(X)$ такое, что $\langle p, y \rangle > s(p, X)$.*

Лемма 3. *Если $X = A + B$, то $s(p, X) = s(p, A) + s(p, B)$.*

Лемма 4. *Если $p \in \operatorname{int} b(X)$, то найдется точка $x \in X$ такая, что $\langle p, x \rangle = s(p, X)$.*

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Если A — M-сильно выпуклое множество, то для любых $a, b \in A$ имеем:

$$\{a, b\} \subset A \quad \to \quad \operatorname{conv}_M\{a, b\} \subseteq \operatorname{conv}_M A = A.$$

Это значит, что A — M-выпукло. □

Доказательство теоремы 2. Докажем сначала включение $\operatorname{int} b(A) \subseteq \operatorname{int} b(M)$. Возьмем некоторый $p \in \operatorname{int} b(A)$. Возьмем некоторые $a, b \in A$. Множество $C = \operatorname{conv}_M\{a, b\}$ содержится в A, значит, $p \in \operatorname{int} b(C)$. А так как C — пересечение транслятов M, то $\operatorname{int} b(C) = \operatorname{int} b(M)$.

Теперь докажем, что $\operatorname{int} b(M) \subseteq b(A)$. Предположим противное: найдется $p \in \operatorname{int} b(M)$ такой, что $p \notin b(A)$. Кроме того, по уже доказанному существует $p_0 \in \operatorname{int} b(M) \cap \operatorname{int} b(A)$. По лемме 4 найдутся такие $x_0 \in M$ и $a_0 \in A$, что

$$s(p_0, M) = \langle p_0, x_0 \rangle = m_M \quad s(p_0, A) = \langle p_0, a_0 \rangle.$$

Так как $p \notin b(A)$, то найдется такая последовательность точек $b_n \in A$, что $\langle p, b_n \rangle \to +\infty$ при $n \to \infty$. Обозначим $C_n = \operatorname{conv}_M\{a_0, b_n\}$.

Теперь, так как M порождающее, то для каждого C_n найдется C_n^* такое, что $C_n + C_n^* = M$. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. По лемме 3, примененной к p_0, найдется такой вектор $c_n^* \in C_n^*$, что $s(p_0, C_n) + \langle p_0, c_n^* \rangle >$

$s(p_0, M) - \varepsilon$. При этом $C_n + c_n^* \subseteq M$, следовательно $a_0 + c_n^* \in M$, а так как $\langle p_0, a_0 \rangle = s(p_0, A) \geq s(p_0, C_n)$ и $s(p_0, M) = \langle p_0, x_0 \rangle = m_M$, то

$$\langle p_0, a_0 + c_n^* \rangle > m_M - \varepsilon.$$

Если определить

$$M_{p_0, m_M - \varepsilon} = \{x \in M : \langle p_0, x \rangle \geq m_M - \varepsilon\},$$

то $a_0 + c_n^* \in M_{p_0, m_M - \varepsilon}$.

По лемме 1 множество $M_{p_0, m_M - \varepsilon}$ ограничено, значит, последовательность $\langle p, a_0 + c_n^* \rangle$ ограничена. Значит, последовательность $\langle p, c_n^* \rangle$ тоже ограничена.

Так как $C_n + c_n^* \subseteq M$, $b_n + c_n^* \in M$. Следовательно, последовательность $\langle p, b_n + c_n^* \rangle$ ограничена сверху, что влечет ограниченность сверху $\langle p, b_n \rangle$. Однако $\langle p, b_n \rangle \to +\infty$, что приводит к противоречию.

Так как $\operatorname{int} b(A) \subseteq \operatorname{int} b(M)$ и $\operatorname{int} b(M) \subseteq b(A)$, то $\operatorname{int} b(A) = \operatorname{int} b(M)$.

Так как M — порождающее множество, то A M-сильно выпукло тогда и только тогда, когда существует A^* такое, что $A + A^* = M$. Это, в свою очередь, равносильно тому, что разность опорных функций $s(p, M) - s(p, A)$ выпукла на $\operatorname{int} b(M) = \operatorname{int} b(A)$.

Докажем выпуклость разности $s(p, M) - s(p, A)$. Возьмем $p_1, p_2 \in \operatorname{int} b(A)$. По лемме 4 найдутся $a_1, a_2 \in A$ такие, что

$$s(p_1, A) = \langle p_1, a_1 \rangle \quad s(p_2, A) = \langle p_2, a_2 \rangle.$$

Обозначим $B = \operatorname{conv}_M \{a_1, a_2\}$. Так как A M-выпукло, то $B \subseteq A$. Следовательно,

$$s(p_1, B) \leq s(p_1, A) = \langle p_1, a_1 \rangle,$$

но $a_1 \in B$, значит, $s(p_1, B) = s(p_1, A)$. Аналогично $s(p_2, B) = s(p_2, A)$.

Так как $B \subseteq A$, то для любого $p \in \operatorname{int} b(A)$

$$s(p, B) \leq s(p, A).$$

Так как B M-выпукло, то для любого $t \in [0, 1]$

$$s(tp_1 + (1-t)p_2, M) - s(tp_1 + (1-t)p_2, B) \leq t(s(p_1, M) - s(p_1, B)) + (1-t)(s(p_2, M) - s(p_2, B)).$$

Следовательно, для любого $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} s(tp_1 + (1-t)p_2, M) - s(tp_1 + (1-t)p_2, A) &\leq \\ &\leq s(tp_1 + (1-t)p_2, M) - s(tp_1 + (1-t)p_2, B) \leq \\ &\leq t(s(p_1, M) - s(p_1, B)) + (1-t)(s(p_2, M) - s(p_2, B)) = \\ &= t(s(p_1, M) - s(p_1, A)) + (1-t)(s(p_2, M) - s(p_2, A)). \end{aligned}$$

То есть $s(p, M) - s(p, A)$ выпукла.

Осталось доказать, что если M ограничено, то $\operatorname{int} b(A) \neq \emptyset$. Докажем более сильное утверждение: A ограничено. Зафиксируем точку $a_0 \in A$. Для любой $b \in A$ по определению M-выпуклого множества $\operatorname{conv}_M \{a_0, b\} \subseteq A$. Это означает в частности, что найдется такое $t \in E$, что

$$a_0, b \in M + t.$$

Значит, $a_0 - t \in M$ и

$$b \in M + t = M + t - a_0 + a_0 \subseteq M - M + a_0,$$

где $M - M$ — сумма Минковского множеств M и $-M$. Отсюда следует, что $A \subseteq a_0 + M - M$. При этом ограниченность M влечет ограниченность $M - M$, значит, A тоже ограничено.

На этом теорема полностью доказана. $\square$

Приведем пример M-выпуклого множества, которое не является M-сильно выпуклым. При этом множество M будет ограниченным, но не порождающим.

Пример. Пусть $E = \mathbb{R}^3$, S_0 — правильный тетраэдр. Рассмотрим четыре плоскости, каждая из которых параллельна одной из граней S_0 и делит соответствующую высоту S_0 пополам. Эти плоскости разбивают S_0 на октаэдр M и четыре меньших тетраэдра, один из которых обозначим A.

Ясно, что A не может быть M-сильно выпуклым, так как никакая трансляция M не покрывает A. Однако A является M-выпуклым. Докажем это.

Возьмем любые точки $a, b \in A$. Чтобы доказать, что $\mathrm{conv}_M\{a, b\} \subseteq A$, достаточно для любой грани F симплекса A найти такой транслят $M + t$, что $M + t \ni a, b$ и $M + t$ лежит по ту же сторону от F, что и A. Рассмотрим гомотетичный A симплекс A' минимального размера, содержащий a и b. Если обозначить грань A', параллельную F за ABC, а оставшуюся вершину за S, то с точностью до симметрий остается разобрать три случая:

1. $a = S$, $b \in ABC$;
2. $a = A$, $b \in SBC$;
3. $a \in AB$, $b \in SC$.

В каждом из этих случаев явно строится транслят $M + t$, содержащий a и b и лежащий по ту же сторону от ABC, что и A'.

4. Заключение

Автор благодарен Е.С. Половинкину и М.В. Балашову за обсуждения, следствием которых явились результаты, изложенные в этой статье. Автор благодарен В.Л. Дольникову за содержательное обсуждение и всестороннюю поддержку.

Список литературы

1. Danzer L., Grünbaum B., Klee V. Helly's theorem and its relatives //Convexity, Proc. of Symposia in Pure Math. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1963. V. 7. P. 101–180.
2. Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли и ее применения. М.: Мир, 1968.
3. Половинкин Е.С. Сильно выпуклый анализ //Математический сборник. 1996. Т. 187, No. 2. С. 103–130.
4. Балашов М.В. Некоторые вопросы сильно выпуклого анализа : Дис. ... канд.физ.-мат. наук по спец. 01.01.09. М.: МФТИ, 1998.
5. Половинкин Е.С., Балашов М.В. M-сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества //Математический сборник. 2000. Т. 191, No. 1. С. 27–64.
6. McMullen, P., Schneider R., Shepherd G.C. Monotypic polytopes and their intersection properties //Geom. Dedicata. 1974. V. 3. P. 99–129.
7. Geivaerts, M. Enkele eigenschappen van de relatie "homothetisch aanpasselijk" in de ruimte der konvexe lichamen //Med. Konink. Acad. Wetensch. België, 1972. V. 34. P. 3–19.
8. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
9. Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
10. Bonnesen, T., Fenchel W. Theorie der konvexen Körper //Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Berlin: Springer Verl., 1934. V. 8, No. 3. P. 77.