Модел. и анализ информ. систем. Т.**8**, №**2** (2001) 17–22

УДК 514.17

Об аналоге теоремы Каратеодори для M-сильно выпуклых множеств

Карасёв Р.Н.[1]
Московский Физико-технический институт
e-mail: r_n_karasev@mail.ru

В данной работе приводится доказательство аналога теоремы Каратеодори для таких M-сильно выпуклых множеств, что множество M — порождающее.

1. Введение

В данной работе приводится доказательство аналога теоремы Каратеодори о выпуклой оболочке. Чтобы его сформулировать введем сначала некоторые определения и обозначения.

Напомним, что сумма Минковского $A+B$ и разность Минковского A/B двух множеств A и B из векторного пространства определяются равенствами (см. [1])

$$A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}=\bigcup_{b\in B} b+A, \quad A/B=\{c : c+B\subseteq A\}=\bigcap_{b\in B} -b+A.$$

Эти операции взаимно полуобратны, то есть $(A/B)+B\subseteq A, \quad A\subseteq (A+B)/B$.

Будем считать, что все множества лежат в $\mathbb{R}^n$. Через $|X|$, $\operatorname{cl} X$, $\operatorname{bd} X$ и $\operatorname{int} X$ будем обозначать: количество элементов в конечном множестве X, или ∞, если множество X бесконечно; замыкание, границу и внутренность множества $X\subseteq\mathbb{R}^n$. Для линейной функции $\lambda(x)$ положим $H_t^\lambda=\{x\in\mathbb{R}^n : \lambda(x)\le t\}$.

Определение 1. Пусть $M\subseteq\mathbb{R}^n$ — выпуклое множество. Выпуклое множество $X\subseteq\mathbb{R}^n$ называется *M-сильно выпуклым* , если $X=M/(-T)$ для некоторого $T\subseteq\mathbb{R}^n$, $T\neq\emptyset$. То есть X — это пересечение некоторого семейства транслятов M. Частный случай этого определения есть понятие R-сильной выпуклости, когда M — это евклидов шар радиуса R.

Это усиление понятия выпуклости приведено в [2, с. 118 – 119], где даны ссылки на некоторые работы, где это понятие исследовалось. В большей части этих работ рассматривался двумерный случай (см. также [3]). Такое понятие выпуклости естественно приводит к определению выпуклой оболочки.

Определение 2. Если множество $S\subset\mathbb{R}^n$ такое, что $M/S\neq\emptyset$, то множество $\operatorname{conv}_M S=M/(M/S)$ называем *M-выпуклой оболочкой* S. Иначе говоря, $\operatorname{conv}_M S$ — это пересечение всех транслятов M, содержащих S. Заметим также, что $\operatorname{conv}_M S$ — это наименьшее по включению M-сильно выпуклое множество, содержащее S. Через $\operatorname{con} S$ и $\operatorname{conv} S$ обозначаем обычную коническую и выпуклую оболочку S.

Если M — евклидов шар, то выполняется следующее свойство, которое играет важную роль в статье в дальнейшем (см., например, [3], [4]).

Определение 3. Выпуклое множество $M\subseteq\mathbb{R}^n$ называется *порождающим*, если для любого M-сильно выпуклого множества X найдется такое выпуклое $X^*\subseteq\mathbb{R}^n$, что $X+X^*=M$.

В работе доказывается теорема Каратеодори для M-сильно выпуклых множеств, если M — порождающее. Для случая строго выпуклого M это утверждение было доказано в диссертации Балашова. Для не строго выпуклого M аналог теоремы Каратеодори М.В. Балашовым доказан с заменой константы $n+1$ на большую. Основной результат данной работы — следующий аналог теоремы Каратеодори.

Теорема 1. Пусть M — порождающее и $S\subseteq\mathbb{R}^n$ такое, что $M/S\neq\emptyset$, тогда

$$\operatorname{conv}_M S=\operatorname{cl}\bigcup_{U\subseteq S, |U|\le n+1}\operatorname{conv}_M U.$$

Замечание. Из этой теоремы легко следует, что для компактных S имеет место формула

$$\operatorname{conv}_M S=\operatorname{cl}\bigcup_{U\subseteq S, |U|\le n+1}\operatorname{conv}_M U,$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №00-01-00705

если заметить, что множество наборов из не более $n+1$ элемента S компактно.

Аналог теоремы Каратеодори будет выведен из следующего утверждения:

Теорема 2. Пусть M — порождающее и $M/S \subseteq M$ для некоторого конечного множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда существует такое $U \subseteq S$, что $M/U \subseteq M$ и $|U| \leq n+1$.

2. Доказательство теорем 1 и 2

В этом разделе теоремы 1 и 2 доказываются по модулю некоторых технических лемм, которые будут доказаны позже. Сначала выведем теорему 1 из теоремы 2.

Доказательство теоремы 1. Ясно, что теорему 1 достаточно доказать для конечных S. Имеем

$$\operatorname{conv}_M S \supseteq \bigcup_{U \subseteq S, |U| \leq n+1} \operatorname{conv}_M U$$

для всех $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Предположим противное, что существует такая x (можно считать $x=0$), что

$$x \in \operatorname{conv}_M S \quad \text{и} \quad x \notin \bigcup_{U \subseteq S, |U| \leq n+1} \operatorname{conv}_M U.$$

Так как $0 \in \operatorname{conv}_M S = M/(M/S)$, то для всех $y \in M/S$, имеем $M - y \ni 0$ или $y \in M$, то есть $M/S \subseteq M$.

Тогда, по теореме 2, существует такое множество $U \subseteq S$, что $|U| \leq n+1$ и $M/U \subseteq M$. Проводя рассуждения в обратном порядке, получаем, что $0 \in \operatorname{conv}_M U$. Это противоречие доказывает теорему 1.

По поводу далее используемых стандартных топологических понятий и результатов (см. [5]).

Лемма 1. Если семейство $\mathcal{F}$ подмножеств топологического пространства X таково, что все $Y \in \mathcal{F}$ гомологически тривиальны и любое компактное подмножество $K \subseteq X$ принадлежит некоторому $Y \in \mathcal{F}$, то X тоже гомологически тривиально.

Лемма 2. Если $X = \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ — топологическое пространство, где все U_i — открыты и гомологически тривиальны, $U_i \subseteq U_j$ при $i < j$, то X тоже гомологически тривиально.

Следующая лемма — основная при доказательстве теоремы 2.

Основная лемма. Пусть A и B — выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда множество $A \setminus \operatorname{cl}(A+B)$ либо пусто, либо гомологически тривиально.

Доказательство этой леммы будет приведено позже, сейчас докажем теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Положим $\{X(s)\}_{s \in S}$, где $X(s) = (M-s) \setminus M$. По условию теоремы, имеем

$$\bigcap_{s \in S} X(s) = (M/S) \setminus M = \emptyset.$$

Покажем, что для всех $V \subseteq S$ множество

$$\bigcap_{s \in V} X(s) = (M/V) \setminus M$$

либо пусто, либо гомологически тривиально. Пусть $A = M/V$. По условию теоремы, A — M-сильно выпукло, т. е. $M = A + B$ для некоторого выпуклого B. Так как M — замкнуто, то по основной лемме $A \setminus M$ либо пусто, либо гомологически тривиально. Так как $\cap_{s \in S} X(s) = \emptyset$, то из топологической теоремы Хелли (см. [2, с. 53]) получаем, что $\cap_{s \in U} X(s) = \emptyset$ для некоторого $U \subseteq S$ и $|U| \leq n+1$. Тогда

$$(M/U) \setminus M = \bigcap_{s \in U} X(s) = \emptyset, \quad \text{то есть} \quad M/U \subseteq M$$

и все доказано.

3. Доказательство основной леммы

Из следующей последовательности лемм мы выведем основную лемму.

Лемма 3. Основную лемму достаточно доказать, если $\operatorname{int} A \neq \emptyset$.

Доказательство. Если $\operatorname{int} A = \emptyset$, то все будем рассматривать в $L = \operatorname{aff} A$ и можно также считать, что L — подпространство. Пусть $C = \operatorname{cl}(A+B)$ и $C' = C \cap L$. Покажем, что существует такое $B' \subseteq L$, что

$C' = \mathrm{cl}(A+B')$. Для этого достаточно показать, что разность опорных функций $s(p,C')$ и $s(p,A)$ выпукла (см. [3]). Для всех $p \in L^*$ имеем

$$s(p,C') = \inf_{p^\perp \in L^\perp} s(p+p^\perp, C) \quad \text{и, значит,} \quad s(p,C') - s(p,A) = \inf_{p^\perp \in L^\perp} s(p+p^\perp, C) - s(p,A).$$

При этом $s(p,A) = s(p+p^\perp, A)$ (ведь $A \in L$), а значит, в правой части стоит выпуклая функция

$$f(p+p^\perp) = s(p+p^\perp, C) - s(p+p^\perp, A)$$

аргумента $p+p^\perp$ (так как $C = \mathrm{cl}(A+B)$). Мы должны доказать, что функция

$$f'(p) = s(p,C') - s(p,A) = \inf_{p^\perp \in L^\perp} f(p+p^\perp)$$

выпукла. Пусть $p_1, p_2 \in L^*$ и $t \in [0,1]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $p_1^\perp, p_2^\perp \in L^\perp$ так, что

$$f'(p_1) > f(p_1+p_1^\perp) - \varepsilon \quad f'(p_2) > f(p_2+p_2^\perp) - \varepsilon.$$

Функция f выпукла, следовательно, $f(t(p_1+p_1^\perp) + (1-t)(p_2+p_2^\perp)) \leq$

$$\leq tf(p_1+p_1^\perp) + (1-t)f(p_2+p_2^\perp) \quad \text{и значит,} \quad f'(tp_1 + (1-t)p_2) \leq tf'(p_1) + (1-t)f'(p_2) + \varepsilon.$$

В силу того, что $\varepsilon > 0$ произвольно, имеем

$$f'(tp_1 + (1-t)p_2) \leq tf'(p_1) + (1-t)f'(p_2), \quad \text{т. е.} \quad f' \quad \text{выпукла и} \quad C' = \mathrm{cl}(A+B').$$

Так как $A \subseteq L$, $A+B' \subseteq L$, $\mathrm{int}\, A \neq \emptyset$ в пространстве L и $A \setminus \mathrm{cl}(A+B') = A \setminus \mathrm{cl}(A+B)$, то основную лемму достаточно проверить для A и B'. Лемма 3 доказана.

Далее предполагаем, что $\mathrm{int}\, A \neq \emptyset$.

Лемма 4. Для выпуклых множеств A и B множества $A \setminus \mathrm{cl}(A+B)$ и $\mathrm{int}\, A \setminus \mathrm{cl}(A+B)$ гомотопически эквивалентны, если $\mathrm{int}\, A \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть сначала $\mathrm{int}\, A \cap \mathrm{int}(A+B) = \emptyset$. Тогда $\mathrm{int}\, A \setminus \mathrm{cl}(A+B) = \mathrm{int}\, A$, а $A \setminus \mathrm{cl}(A+B)$ отличается от этого множества точками из $\mathrm{bd}\, A$ и, очевидно, оба они гомотопически тривиальны.

Пусть теперь существует $p \in \mathrm{int}\, A \cap \mathrm{int}(A+B)$ (можно полагать, что $p = 0$). Тогда очевидно, что для любого луча r, выходящего из p, $r \cap A \setminus \mathrm{cl}(A+B)$ — это полуинтервал $(x_r, y_r]$, а $r \cap (\mathrm{int}\, A) \setminus \mathrm{cl}(A+B)$ — это интервал (x_r, y_r) (при этом возможно $y_r = \infty$ на луче r). Точка x_r непрерывно зависит от луча r на множестве тех лучей, для которых $r \cap A \setminus \mathrm{cl}(A+B) \neq \emptyset$, а точка y_r непрерывно зависит от луча r, если считать луч пополненным бесконечно удаленной точкой. Пусть

$$\phi_r = \min\{\frac{\|x_r\| + \|y_r\|}{2}, \|x_r\| + 1\} \quad \text{и} \quad \psi_r \quad \text{— сужение} \quad \phi_r \quad \text{на} \quad r \cap (\mathrm{int}\, A) \setminus \mathrm{cl}(A+B).$$

Отображения ϕ_r и ψ_r задают непрерывные отображения

$$\phi : A \setminus \mathrm{cl}(A+B) \to (\mathrm{int}\, A) \setminus \mathrm{cl}(A+B) \quad \text{и} \quad \psi : (\mathrm{int}\, A) \setminus \mathrm{cl}(A+B) \to A \setminus \mathrm{cl}(A+B),$$

которые дают гомотопическую эквивалентность между $A \setminus \mathrm{cl}(A+B)$ и $(\mathrm{int}\, A) \setminus \mathrm{cl}(A+B)$. Действительно, отображение $\phi(\psi(z))$ гомотопически эквивалентно тождественному посредством гомотопии $h(t,z) = (1-t)z + t\phi(\psi(z))$, и аналогично для $\psi(\phi(z))$. Лемма доказана.

Лемма 5. Утверждение основной леммы верно, если оно верно для ограниченных A и B.

Доказательство. По леммам 3 и 4 достаточно доказать гомологическую тривиальность множества $(\mathrm{int}\, A) \setminus \mathrm{cl}(A+B)$, где $\mathrm{int}\, A \neq \emptyset$. Сначала предположим, что множество $\mathrm{cl}(A+B)$ не содержит ни одной прямой. Следовательно, существует такая линейная функция λ на $\mathbb{R}^n$, что множества $H_t^\lambda \cap \mathrm{cl}(A+B)$ ограничены при любом t. Тогда множества $H_t^\lambda \cap A$ и $H_a^\lambda \cap B$ тоже ограничены при любом t.

После прибавления к функции λ некоторой константы можно считать, что $l(a) \geq 0$ для всех $a \in A$ и $l(b) \geq 0$ для всех $b \in B$.

Обозначим $A_t = H_t^\lambda \cap A$ и $B_t = B \cap H_t^\lambda$. Множество $(\mathrm{int}\, A) \setminus \mathrm{cl}(A+B)$ является объединением возрастающей по включению последовательности открытых множеств

$$(\mathrm{int}\, A_n) \setminus \mathrm{cl}(A+B) \quad n \in \mathbb{N},$$

поэтому по лемме 2 достаточно доказать гомологическую тривиальность каждого из $(\operatorname{int} A_n) \setminus \operatorname{cl}(A+B)$.

Так как $l(a) \geq 0$ для всех $a \in A$ и $l(b) \geq 0$ для всех $b \in B$, то нетрудно заметить, что

$$H_n^\lambda \cap \operatorname{cl}(A+B) = H_n^\lambda \cap \operatorname{cl}(A_n + B_n) \quad \text{и, значит,} \quad (\operatorname{int} A_n) \setminus \operatorname{cl}(A+B) = (\operatorname{int} A_n) \setminus \operatorname{cl}(A_n + B_n).$$

Но по лемме 4 и основной лемме для ограниченных множеств, множество в правой части гомологически тривиально, либо пусто.

Значит, остается рассмотреть случай, когда $\operatorname{cl}(A+B)$ содержит некоторую прямую l. Пусть π — проекция вдоль прямой l, а $\lambda(x)$ — некоторая линейная функция, не постоянная на прямой l.

В этом случае множества $\pi((\operatorname{int} A) \setminus \operatorname{cl}(A+B))$ и $(\operatorname{int} A) \setminus \operatorname{cl}(A+B)$ гомотопически эквивалентны с помощью отображения π. Действительно, для точки $x \in \pi((\operatorname{int} A) \setminus \operatorname{cl}(A+B))$

$$\pi^{-1}(x) \cap (\operatorname{int} A) \setminus \operatorname{cl}(A+B) = \pi^{-1}(x) \cap \operatorname{int} A.$$

При этом $\pi^{-1}(x) \cap \operatorname{int} A$ является некоторым открытым интервалом $(x_1\ x_2)$ (возможно, что точки некоторые из точек x_1, x_2 лежат в бесконечности на прямой $\pi^{-1}(x)$). Для $x \in \pi(\operatorname{int} A)$ положим

$$a_1(x) = \lambda(x_1) < a_2(x) = \lambda(x_2),$$

при этом может быть $a_1(x) = -\infty$ и $a_2(x) = +\infty$.

Если для каждого $x \in \pi(\operatorname{int} A)$ взять точку $\rho(x) \in \pi^{-1}(x)$ так, что

$$\lambda(\rho(x)) = \tan(\frac{1}{2}(\arctan(a_1(x)) + \arctan(a_2(x)))),$$

(считая, что $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ и $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$) то ρ будет непрерывным. Отображения ρ и π зададут гомотопическую эквивалентность множеств $\pi((\operatorname{int} A) \setminus \operatorname{cl}(A+B))$ и $(\operatorname{int} A) \setminus \operatorname{cl}(A+B)$.

Если заметить, что

$$\pi((\operatorname{int} A) \setminus \operatorname{cl}(A+B)) = ((\operatorname{int} \pi(A)) \setminus \operatorname{cl}(\pi(A) + \pi(B))),$$

и предположить, что для множеств $\pi(A)$ и $\pi(B)$ все уже доказано, то доказательство можно считать законченным с помощью индукции по размерности.

Далее предполагается, что A и B ограничены, тогда $\operatorname{cl}(A+B) = A+B$.

Лемма 6. Если утверждение основной леммы верно для строго выпуклых, гладких и ограниченных A и B, то основная лемма верна.

Доказательство. Пусть основная лемма верна для гладких и строго выпуклых B. Для выпуклого множества B, очевидно, найдется семейство гладких и строго выпуклых множеств $\{B_i\}_{i \geq 1}$ такое, что $B_{i+1} \subseteq B_i$ для всех $i \geq 1$ и $B = \bigcap_{i \geq 1} B_i$.

Так как для B_i основная лемма верна, то $A \setminus (A + B_i)$ либо пусты, либо гомологически тривиальны. Так как $A \setminus (A+B)$ — это объединение упорядоченного по включению семейства своих относительно открытых подмножеств $A \setminus (A + B_i)$, каждое из которых гомологически тривиально, либо пусто, то $A \setminus (A+B)$ гомологически тривиально, либо пусто.

Пусть теперь основная лемма верна для гладких и строго выпуклых A и B. Покажем, что она верна для случая, когда A либо не гладко, либо не строго выпукло. При этом B уже можно считать гладким и строго выпуклым. По леммам 3 и 4 достаточно показать, что множество $\operatorname{int} A \setminus (A+B)$ гомологически тривиально или пусто.

Рассмотрим последовательность гладких и строго выпуклых множеств $\{A_i\}_{i \geq 1}$ таких, что $A_{i+1} \supseteq A_i$ для всех $i \geq 1$, $A = \bigcup_{i \geq 1} A_i$. Тогда A — предел последовательности $\{A_i\}_{i \geq 1}$ в хаусдорфовой метрике для выпуклых компактов и существует такая последовательность $\varepsilon_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$, что $\lim_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0$ и $A \subseteq A_i + \varepsilon_i S_1$, где S_1 — евклидов шар радиуса 1. Пусть $B_i = B + \varepsilon_i S_1$. Тогда множества A_i, B_i — гладкие, строго выпуклые и

$$A_i \subseteq A, \quad \text{и} \quad A_i + B_i = A_i + \varepsilon_i S_1 + B \supseteq A + B, \quad \text{причем,} \quad A = \bigcup_{i \geq 1} A_i \quad \text{и} \quad A + B = \bigcap_{i \geq 1} A_i + B_i.$$

Следовательно,

$$(\operatorname{int} A) \setminus (A+B) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\operatorname{int} A_i) \setminus (A_i + B_i).$$

Каждое $(\operatorname{int} A_i) \setminus (A_i + B_i)$ либо гомологически тривиально, либо пусто. Для любого компакта $K \subseteq (\operatorname{int} A) \setminus (A + B)$ найдется такое i, что $K \subseteq (\operatorname{int} A_i) \setminus (A_i + B_i)$; достаточно взять i таким, что

$$\varepsilon_i < \min\{\operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{int} A), \operatorname{dist}(K, A + B)\}.$$

По лемме 1 $(\operatorname{int} A) \setminus (A + B)$ гомотопически тривиально, либо пусто и все доказано.

В дальнейшем выпуклые множества A и B считаем ограниченными, гладкими и строго выпуклыми. Заметим, что если множество $0 \in B$, то $A \setminus (A + B) = \emptyset$, и в этом случае основная лемма верна. Поэтому далее предполагаем, что $O \notin B$ и, следовательно, $\operatorname{con} B$ — гладкие острые выпуклые конусы.

Для любой прямой l и вектора $x \parallel l$ и двух точек $a_1, a_2 \in l$ будем говорить, что a_2 больше (дальше) a_1 относительно вектора x, если $a_2 = a_1 + \lambda x$, где $\lambda > 0$. Понятие меньше (ближе) определяется аналогично.

Лемма 7. Для любого вектора $= 0 \neq x \in X$ и любой прямой $l \parallel x$ пересечение $l \cap (A \setminus (A + B))$ либо пусто, либо состоит из одного полуинтервала.

Доказательство. Ясно, что $T_1 = l \cap A$ и $T_2 = l \cap (A + B)$ — отрезки, как пересечения прямой и выпуклого множества. Так что нам нужно показать, что множество $T_1 \setminus T_2$ либо пусто, либо состоит из одного полуинтервала.

Докажем от противного. Утверждение этой леммы может быть неверным только в одном случае, когда отрезок T_2 содержится внутри T_1. Но $x \in \operatorname{con} B$, значит, найдется $b = \lambda x \in B$ $(\lambda > 0)$, значит множество $A + B$ содержит отрезок $T_1 + b$ на прямой l, то есть $T_1 \supset T_2 \supseteq T_1 + b$, что является противоречием.

Лемма 8. Пусть A, B — ограниченные, гладкие, строго выпуклые и $O \notin B$. Тогда найдется такое непрерывное отображение $f : A \to A$, что: 1) $f(a) - a \in -\operatorname{con} B$ для любого $a \in A$; 2) $f(f(a)) = a$ для любого $a \in A$; 3) $f(A) \subseteq A \setminus (A + B)$.

Доказательство. Пусть $A' = A + \operatorname{con} B$ и докажем более сильное утверждение, что существует отображение $f : A' \to A$, такое, что: 1)$f(a) - a \in -\operatorname{con} B$ для любого $a \in A'$; 2) $f(f(a)) = f(a)$ для любого $a \in A'$; 3)$f(A') \subseteq A \setminus (A + B)$.

Определим f сначала на $\operatorname{bd} A'$. Так как B — гладкое, то множество A' — гладкое. Обозначим через n_p^C внешнюю нормаль к гладкому выпуклому множеству C в точке $p \in \operatorname{bd} C$.

Точке $a \in \operatorname{bd} A'$ поставим в соответствие $f(a) \in \operatorname{bd} A$, так, что $n_{f(a)}^A = n_a^{A'}$. Тогда очевидно, что $f(f(a)) = f(a)$ для всех $a \in A$. Покажем, что оно непрерывно и выполняются свойства 1), 3).

Отображение f — композиция сферического отображения множества A' и отображения обратного к сферическому множества A и, следовательно, непрерывно.

Для всех точек $a \in \operatorname{bd} A'$ существует такое $x \in \operatorname{con} B$, что $a \in \operatorname{bd}(A + x)$. Тогда ясно, что $n_a^{A'} = n_a^{A+x}$ и $f(a) = a - x$, то есть $f(a) - a \in -\operatorname{con} B$. Свойство 1 выполнено.

Докажем выполнение свойства 3. Образ $\operatorname{Im} f$ отображения f — это те точки $p \in \operatorname{bd} A$, для которых $n_p^A \in \operatorname{con} B^*$, где $\operatorname{con} B^*$ — двойственный конус к $\operatorname{con} B$. Покажем, что если $p \in \operatorname{Im}$, то $p \notin A + B$. В самом деле, если $n_p^A \in \operatorname{con} B^*$, то $B \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : (n_p^A, x) \leq 0\}$. Так как n_p^A — внешняя нормаль к A, то $(n_p^A, a - p) \leq 0$ для всех $a \in A$.

Значит, $(n_p^A, x - p) \leq 0$ для всех $x = a + b \in A + B$, а это означает, что если $p \in A + B$, то $p = a + b$, где $a \in A,\ b \in B)$ и $(n_p^A, p - a) = (n_p^A, b) = 0$. Тогда $p, a \in A$ и так как A строго выпукло, то $p = a$ и $b = O$. Но это противоречит $O \notin B$. Значит, $p \notin A + B$ и $p \in A \setminus (A + B)$.

Теперь продолжим отображение f на все A'. Пусть $x' \in \operatorname{int}(-\operatorname{con} B)$. Для любой $a \in A'$ положим

$$g(a) \in \operatorname{bd} A' \quad g(a) - a = \lambda(a) x', \quad \lambda(a) \geq 0 \quad \text{и} \quad f'(a) = f(g(a)).$$

Легко видеть, что $g(a)$ определено и непрерывно. Следовательно, $f'(a)$ — непрерывно и для него свойства 2 и 3 очевидно продолжают выполняться, а свойство 1 выполняется потому, что

$$f'(a) - a = f(g(a)) - a = f(g(a)) - g(a) + g(a) - a = f(g(a)) - g(a) + \lambda(a) x' \in \operatorname{con} B + \operatorname{con} B = \operatorname{con} B.$$

Тем самым лемма доказана.

Доказательство основной леммы. По лемме 6 достаточно рассматривать ограниченные, строго выпуклые и гладкие A и B. Также можно считать, что $O \notin B$.

Рассмотрим отображение f из леммы 8. Покажем, что оно задает гомотопическую эквивалентность A и $f(A)$. Пусть $i : f(A) \to A$ — отображение вложения. Тогда $i \circ f$ гомотопно тождественному отображению A, так как отрезок $[a, f(a)] \subseteq A$ для любой точки $a \in A$. Отображение $f \circ i$ равно тождественному отображению $f(A)$. Значит, f — гомотопическая эквивалентность A и $f(A)$.

Покажем теперь, что f задает гомотопическую эквивалентность $A \setminus (A + B)$ и $f(A) = f(A \setminus (A + B))$. В этом случае отображение $f \circ i$ равно тождественному отображению $f(A)$. Отображение $i \circ f$ гомотопно тождественному отображению множества $A \setminus (A+B)$. В самом деле, покажем, что для любой точки $a \in A \setminus (A+B)$ отрезок $[a\ i(f(a))]$ лежит в $A \setminus (A+B)$. По лемме 7 этот отрезок параллелен некоторому $x \in \operatorname{con} B$, и по свойству 1 отображения f прямая, содержащая этот отрезок, пересекает $A \setminus (A+B)$ по некоторому полуинтервалу, это значит, что отрезок $[a\ i(f(a))]$ содержится в этом полуинтервале, так как его концы содержатся в нем. Таким образом доказано, что $A \setminus (A+B)$ гомотопически эквивалентно A. Доказательство завершено, так как выпуклое множество A, очевидно, гомологически тривиально.

4. Заключение

Автор хочет поблагодарить М.В. Балашова за формулировку задачи, В.Л. Дольникова за всестороннюю поддержку и содержательные обсуждения и Г.Н. Яковлева за полезные советы при подготовке статьи.

Литература

[1] Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

[2] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли и ее применения. М.: Мир, 1968.

[3] Половинкин Е.С., Балашов М.В. M-сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества //Математический сборник. 2000. **191**. №. 1. С. 27–64.

[4] Geivaerts M. Enkele eigenschappen van de relatie ”homothetisch aanpasselijk” in de ruimte der konvexe lichamen //Med. Konink. Acad. Wetensch. België. 1972. **34**, P. 3–19.

[5] Спеньер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.