Модел. и анализ информ. систем. Т.**8**, №**2** (2001) 3–9

УДК 514.17

О характеризации порождающих множеств

Карасёв Р.Н.[1]
Московский Физико-технический институт
e-mail: r_n_karasev@mail.ru

В этой статье изучается некоторое свойство выпуклых множеств. Рассматривается критерий, позволяющий упростить проверку этого свойства. Также вводится некоторая модификация этого свойства, которая позволяет исследовать нормы в $\mathbb{R}^n$, в которых каждое множество диаметра 1 может быть вложено в тело постоянной ширины 1.

1. Введение

В этой статье изучаются выпуклые множества, обладающие некоторым специальным свойством. Чтобы его сформулировать, введем сначала некоторые определения и обозначения.

Напомним, что сумма $A + B$ и разность A/B Минковского двух множеств A и B из векторного пространства определяются равенствами (см. [1])

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b\in B} b + A, \quad A/B = \{c : c + B \subseteq A\} = \bigcap_{b\in B} -b + A.$$

Эти операции взаимно полуобратны, то есть

$$(A/B) + B \subseteq A, \quad A \subseteq (A + B)/B.$$

Будем считать, что все множества лежат в некотором рефлексивном банаховом пространстве E (E^* — сопряженное пространство к E, B_1 — единичный шар E) и все выпуклые множества — замкнуты, если не упомянуто противное. Через $\operatorname{bd} X$ и $\operatorname{int} X$ будем обозначать границу множества X и его внутренность соответственно.

Определение 1. Множество Y называется *слагаемым* множества X, если найдется такое Y^*, что $Y + Y^* = X$.

Определение 2. Множество X называется *дополняемым* относительно семейства множеств P в E, если для всех таких $T \in P$, что $Y/(-T) \neq \emptyset$, Y — слагаемое X. Множество $X \subseteq E$ назовем *порождающим*, если оно дополняемо относительно всех подмножеств $T \subseteq E$.

Основная цель этой статьи — характеризация порождающих множеств. Порождающие множества изучались в работах [2, 3, 4, 5 и др.]. Название "порождающее" взято из [2]. В [4] было доказано, что всякое двумерное множество — порождающее, а в [5] изучались многогранники, являющиеся порождающими множествами.

Определение 3. Множество A назовем X-*сильно выпуклым* ([2], а также см. [6, с. 118 – 119]), если $A = X/(-T)$, где $T \subset E$, $T \neq \emptyset$.

Определение 4. Пусть X и Y — строго выпуклые тела. Тогда Y назовем *локально вложимым* в X, если выполняется следующее: для любой точки $x \in \operatorname{bd} X$ найдется такая точка $y \in \operatorname{bd} Y$ и некоторая окрестность U точки y, что

$$(Y \cap U) + (x - y) \subseteq X.$$

Т. е., при трансляции, переводящей точку y в точку x, образ множества $Y \cup U$ лежит в X.

Заметим, что из-за строгой выпуклости Y точка y определена однозначно, так как внешняя нормаль к X в x должна быть и внешней нормалью к Y в y. Точка на границе строго выпуклого множества однозначно определена внешней нормалью. Следовательно, точка y однозначно определена x.

Следующие определения общеизвестны, см. [1, 2].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №00-01-00705

Определение 5. Функция $s : E^* \longrightarrow \mathbb{R}$, определяемая равенством

$$s(p, X) = \sup_{x \in X} \langle p, x \rangle,$$

называется *опорной функцией* множества $X \subseteq E$.

Определение 6. Для выпуклого множества $X \subseteq E$ *конусом нормалей* $N_x(X) \subseteq E^*$ в точке $x \in \operatorname{bd} X$ называется

$$N_x(X) = \{p \in E^* : \langle p, x \rangle = s(p, X)\}.$$

Определение 7. *Барьерным конусом* множества $X \subseteq E$ называется

$$b(X) = \{p \in E^* : s(p, X) < +\infty\}.$$

Основной результат работы — следующая теорема.

Теорема 1. Если $\operatorname{int} b(X) \neq \emptyset$ для выпуклого множества $X \subseteq E$, то X порождающее тогда и только тогда, когда для всех $T \in E$ таких, что $|T| \leq 2$ и $Y = X/(-T) \neq \emptyset$, Y — слагаемое X.

Если E — конечномерно, то условие $\operatorname{int} b(X) \neq \emptyset$ не нужно.

Таким образом, для проверки того, что некоторое множество — порождающие, достаточно проверить дополняемость для попарных пересечений его транслятов.

В работе [2] было показано, что в n-мерном пространстве теорема Каратеодори позволяет ограничить проверку порождаемости проверкой дополняемости такими множествами T, что $|T| \leq n$. В работе [3] получены аналогичные критерии, для того чтобы множество Y было слагаемым X и доказано, что проверка этого сводится к проверке некоторого утверждения для конечных подмножеств X.

Определение 8. Множество $X \subseteq E$ называется множеством *постоянной ширины*, если $|s(p, X) - s(-p, X)|$ постоянно для всех $p \in E^*$.

В данной работе полученные результаты о порождающих множествах применяются к исследованию таких норм в пространстве $\mathbb{R}^n$, что любое множество диаметра 1 может быть вложено в множество постоянной ширины 1 (см. обзор [7]), а также [8], [9] и [10], где разбирается случай евклидовой нормы и ставятся вопросы о других нормах).

Определение 9. Норму $\| \, \|$ в $\mathbb{R}^n$ назовем *совершенной*, если любое множество Y диаметра 1 может быть вложено в множество постоянной ширины 1.

Определение 10. Будем говорить, что норма обладает s-свойством, если B_1 дополняем относительно всех T таких, что $\operatorname{diam} T \leq 1$.

Известно, что евклидова норма, нормы в двумерном пространстве и нормы с параллелотопом в качестве единичного шара — совершенны, см. [7], [8]. Также легко видеть, что прямая сумма двух норм — совершенна, если совершенны каждая из норм (ссылку на этот вполне очевидный факт автору не удалось найти). Это позволяет получить большое количество примеров норм с этим свойством.

В обзоре [7] ставится вопрос о характеризации совершенных норм и в [9] были приведены примеры не совершенных норм. Следуя [9], введем понятие максимального множества диаметра 1.

Определение 11. *Максимальным множеством диаметра 1* называется множество диаметра 1, не являющееся собственным подмножеством какого-либо множества диаметра 1.

В [9] доказано следующее несложное утверждение.

Предложение. Любое множество диаметра 1 является подмножеством некоторого максимального множества диаметра 1.

Это утверждение сводит проверку совершенности нормы к доказательству того, что любое максимальное множество диаметра 1 является телом постоянной ширины 1. Следующие результаты — критерии совершенности нормы.

Теорема 2. Если для единичного шара B_1 нормы множество $Y = B_1 \cap (B_1 + u)$ — слагаемое B_1 при всех u, $\|u\| \leq 1$, то норма совершенная.

Теорема 3. Если норма строго выпукла, то верно и обратное.

Следствие. Если единичный шар B_1 нормы — порождающее множество, то норма совершенная.

2. Вспомогательные факты

Приведем некоторые вспомогательные факты, необходимые в дальнейшем.

Лемма 1. Если $Y = \cap_{i=1}^{n} X_i$, где X_i — выпуклы для всех i и $y \in \operatorname{bd} Y$, то

$$N_y(Y) = \sum_{i=1,\ y\in \operatorname{bd} X_i}^{n} N_y(X_i).$$

Эта лемма общеизвестна, см. [1].

Лемма 2. Пусть X — выпуклое множество и $p \in \operatorname{int} b(X)$. Тогда множество $X_{p,a} = \{x \in X : \langle p, x\rangle \geq a\}$ — ограничено.

Доказательство. Пусть $p \in U$, $U \subseteq b(X)$ и $U \subseteq E^*$ — открыто. Очевидно, что $-p \in b(X_{p,a})$, поэтому $U - p \subseteq b(X_{p,a})$ и $U - p$ — окрестность нуля. Следовательно, $\langle p, x\rangle$ ограничено на $X_{p,a}$ при любом p, т.е. $X_{p,a}$ — слабо ограничено. Но тогда $X_{p,a}$ — ограничено (см. [7, с. 185]).

Следующие три леммы хорошо известны (см., например, [1, 2]).

Лемма 3. Если $\operatorname{int} b(X) \neq \emptyset$, то для любой точки $y \notin X$ найдется такое $p \in \operatorname{int} b(X)$, что $\langle p, y\rangle > s(p, X)$.

Лемма 4. Если $X = A + B$, то $s(p, X) = s(p, A) + s(p, B)$.

Лемма 5. Если $p \in \operatorname{int} b(X)$, то найдется $x \in X$ такая, что $\langle p, x\rangle = s(p, X)$.

Лемма 6. Пусть X и Y — строго выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ и Y локально вложимо в X. Тогда Y — слагаемое X.

Дадим только набросок доказательства этой леммы, так как оно достаточно стандартно. Легко видеть, что определение локальной вложимости можно переформулировать в терминах опорных функций для X и Y и необходимо доказать, что $s(p, X) - s(p, Y)$ — выпуклая функция. Доказательство же выпуклости фактически проводится для функции

$$f(t) = s(tp_1 + (1 - t)p_2, X) - s(tp_1 + (1 - t)p_2, Y)$$

одной переменной и следует из достаточно тривиального локального критерия выпуклости непрерывной функции:

Пусть $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и такова, что для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдутся $a, b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$f(t_0) = at_0 + b, \quad \forall t\ f(t) \geq at + b.$$

Тогда $f(t)$ выпукла.

3. Доказательство теоремы 1

Сначала, как и в работе [2], заметим, что $b(X) = b(Y)$.

В конечномерном случае условие $\operatorname{int} b(X) \neq \emptyset$ не нужно, так как если $\operatorname{int} b(X) = \emptyset$, то найдется линейное подпространство $L \subset E$ такое, что $b(X) \in L$. Тогда множества X и Y факторизуются по линейному подпространству $L^\perp$, что сводит теорему к случаю $\operatorname{int} b(X) \neq \emptyset$.

Пусть $Y^* = X/Y$ и $Z = Y + Y^*$, тогда нужно доказать, что $Z = X$. Множество Y^* очевидно замкнуто, замкнутость множества Z доказана в [2].

Сначала проведем доказательство для конечных T индукцией по числу элементов $|T|$.

Пусть $Z \neq X$. Тогда по лемме 3 найдется $p \in \operatorname{int} b(X) = \operatorname{int} b(Z)$ такое, что $s(p, X) > s(p, Z)$. Также по лемме 5 можно найти такую точку $z \in Z$, что $\langle p, z\rangle = s(p, Z)$. Так как $Z = Y + Y^*$, то найдется $y' \in Y^*$ такое, что $z \in Y + y'$. Так как

$$Y + y' = \cap_{t\in T}(X + t + y'),$$

то по лемме 1

$$N_z(Y + y') = \sum_{t\in T} N_z(X + t + y'), \quad \text{т. е.} \quad p = \sum_{t\in T} p_t, \quad p_t \in N_z(X + t + y').$$

Рассмотрим два случая:

i) Если только один из p_t не равен нулю (при $t = \tau$), то заметим, что $Y + y' \subseteq (X + \tau)$. Тогда, так как $p = p_t$ и

$$s(p, Z) = s(p, Y) + \langle p, y'\rangle = s(p, X) + \langle p, \tau\rangle,$$

то $\langle p, \tau\rangle < 0$ $(s(p, Z) > s(p, X))$. Так как $Y + (y' - \tau) \subseteq X$, то $Y + (y' - \tau) \subseteq Z$ и тогда

$$s(p, Z) \geq s(p, Y) + \langle p, y'\rangle - \langle p, \tau\rangle = s(p, Z) - \langle p, \tau\rangle > s(p, Z),$$

приходим к противоречию.

ii) Если как минимум два вектора p_τ и p_σ не равны нулю, то можно считать, что их сумма p_2 тоже не равна нулю. Пусть $T' = T \setminus \{\tau, \sigma\}$, положим

$$Y_2 = (X + \tau + y') \cap (X + \sigma + y'), \quad Y_2^+ = \cap_{t \in T'} (X + t + y').$$

Тогда $Y + y' = Y_2 \cap Y_2^+$. По условию теоремы, есть множество Y_2^* такое, что $Y_2 + Y_2^* = X$. По лемме 4, имеем,

$$s(p_2, X) = s(p_2, Y_2) + s(p_2, Y_2^*),$$

то есть для любого положительного $\epsilon > 0$ существует такой $t_2 \in Y_2^*$, что

$$s(p_2, X) \le s(p_2, Y_2) + \langle p_2, t_2 \rangle + \epsilon \quad \text{и} \quad Y_2 + t_2 \subseteq X.$$

При этом $p_2 \in N_z(Y_2)$, следовательно, $s(p_2, Y_2) = \langle p_2, z \rangle$.

Пусть

$$Y_3 = (X - t_2) \cap Y_2^+.$$

Ясно, что либо $p - p_2 = 0$, либо $p - p_2 \in N_z(Y_2^+)$. В первом случае имеем,

$$s(p, Y_3) = s(p_2, Y_3) \le s(p_2, X - t_2) \le s(p_2, Y_2) + \epsilon = \langle p_2, z \rangle + \epsilon = \langle p, z \rangle + \epsilon.$$

А во втором имеем,

$$s(p, Y_3) \le s(p_2, Y_3) + s(p - p_2, Y_3) \le s(p_2, X - t_2) + s(p - p_2, Y_2^+) \le \langle p_2, z \rangle + \epsilon + \langle p - p_2, z \rangle = \langle p, z \rangle + \epsilon,$$

что то же самое. Значит, ϵ можно выбрать таким, что

$$s(p, Y_3) < s(p, X), \quad \text{так как} \quad s(p, X) > \langle p, z \rangle.$$

Заметим, что Y_3 — пересечение $|T|-1$ транслятов X и, по предположению индукции, Y_3 — слагаемое X. Тогда, по лемме 4, для любого $\epsilon > 0$ найдется $y'' \in Y_3^*$ такое, что

$$Y_3 + y'' \subseteq X \quad \text{и} \quad s(p, Y_3) + \langle p, y'' \rangle \ge s(p, X) - \epsilon.$$

Так как $s(p, X) > s(p, Y_3)$, то, при достаточно малом ϵ, имеем,

$$\langle p, y'' \rangle > 0 \quad \text{но} \quad Y + y' + y'' \subseteq Y_3 + y'' \subseteq X \quad \text{и, следовательно,} \quad Y + y' + y'' \subseteq Z.$$

Значит, $z + y'' \in Z$ и тогда получаем

$$s(p, Z) \ge \langle p, z + y'' \rangle = \langle p, z \rangle + \langle p, y'' \rangle = s(p, Z) + \langle p, y'' \rangle > s(p, Z),$$

что приводит к противоречию.

Докажем теперь для произвольных T. Предположим $Z \neq X$. Так, как в предыдущем случае, возьмем некоторый $p \in \operatorname{int} b(X)$ такой, что $s(p, X) > s(p, Z)$ и такую точку $z \in Y + y' \subseteq Z$, что $\langle p, z \rangle = s(p, Z)$.

Заметим следующее: если удастся найти такое пересечение конечного числа транслятов

$$Y_F = \cap_{t \in F, F \subset T, \ |F| < \infty} (X + t + y'), \quad \text{что} \quad s(p, Y_F) < s(p, X),$$

то мы сразу придем к противоречию. Действительно, при этом найдется $y'' \in Y_F^*$ такой, что

$$s(p, X) \le s(p, Y_F) + \langle p, y'' \rangle + \epsilon$$

и при достаточно малом ϵ получаем, что $\langle p, y'' \rangle > 0$. При этом

$$Y + y' + y'' \subseteq Y_F + y'' \subseteq X \Longrightarrow z + y'' \in Y + y' + y'' \subseteq Z.$$

Но тогда

$$s(p, Z) \ge \langle p, z + y'' \rangle = s(p, Z) + \langle p, y'' \rangle > s(p, Z),$$

что приводит к противоречию.

Итак, предположим противное — $s(p, Y_F) \ge s(p, X)$ для всех конечных $F \subset T$. Положим ϵ таким, что $s(p, Z) < s(p, X) - \epsilon$ и обозначим

$$H = \{x \in E : \langle p, x \rangle \ge s(p, X) - \epsilon\}.$$

Тогда все Y_F пересекают H, но $Y + y'$ не пересекает H, так как на $Y + y'$ функция $\langle p, \cdot \rangle$ меньше, чем $s(p, X) - \epsilon$. По лемме 2 все множества $(X + t + y') \cap H$ ограничены и их пересечение $(Y + y') \cap H$ пусто. Так как в рефлексивном банаховом пространстве все ограниченные замкнутые множества компактны в слабой топологии ($(X + t + y')$ замкнуты в слабой топологии, так как они выпуклы и замкнуты в обычной топологии), то пересечение компактных множеств пусто тогда, когда пусто пересечение некоторого конечного подсемейства F. Это означает, что $Y_F \cap H = \emptyset$, что приводит к противоречию.

4. Применение теоремы 1

Покажем, как с помощью теоремы 1 можно доказать некоторые известные утверждения.
Теорема 4. Эллипсоиды — порождающие множества.
Доказательство. Ясно, что по теореме 1 это утверждение достаточно доказать для пересечения двух единичных шаров в гильбертовом пространстве. Возьмем произвольную точку $x \in \operatorname{bd} X$ с единичным вектором внешней нормали n и найдем точку $y \in Y$, у которой такой же вектор нормали. Теперь сдвинем Y так, чтобы точка y совпала с x. При этом по лемме 1, имеем, $n = \alpha n_1 + \beta n_2$.

Если при этом один из векторов αn_1 и βn_2 равен нулю, то или $n = n_1$ или $n = n_2$. Это означает, что X совпадает с соответствующим $X + t_i$. В этом случае Y лежит в X. Рассмотрим случай, когда α и β не равны нулю. Заметим, что из выпуклости единичного шара следует, что $\alpha + \beta \geq 1$.

Тогда множество X задается неравенством

$$X = \{x' : (x' - x, x' - x) + 2(n, x' - x) \leq 0\},$$

так как это единичный шар, нормаль которого известна. Аналогично, множество точек $x' \in Y$ задано системой

$$(x' - x, x' - x) + 2(n_1, x' - x) \leq (x' - x, x' - x) + 2(n_2, x' - x) \leq 0.$$

Теперь, если какая-то точка x' находится в Y, то сложив оба неравенства системы, определяющей Y, предварительно умножив их на α и β найдем, что

$$(\alpha + \beta)(x' - x, x' - x) + 2(n, x' - x) \leq 0,$$

Так как $(x' - x, x' - x) \leq (\alpha + \beta)(x' - x, x' - x)$, то выполняется

$$(x' - x, x' - x) + 2(n, x' - x) \leq 0,$$

то есть $x' \in X$, это означает, что $Y \subseteq X$. Согласно "опорному принципу" из [2] получаем, что Y является слагаемым X.
Теорема 5. Параболоиды — порождающие множества.
Доказательство. Можно считать, что параболоид — это множество точек (y, x) в пространстве $\mathbb{R}^1 \oplus H$, где H — гильбертово пространство, задаваемое неравенством $y \geq (x, x)$.

Для вектора $v \in \mathbb{R}^1 \oplus H$ через v_y и v_x обозначим проекции вектора v на $\mathbb{R}^1$ и H соответственно. Как и в доказательстве предыдущей теоремы возьмем соответствующие точки в X и Y с одинаковой внешней нормалью n и сдвинем Y так, чтобы они совпали. Также, по лемме 1, имеем, что либо $n = n_1$ или $n = n_2$, либо $n = \alpha n_1 + \beta n_2$. Здесь векторы нормали будем считать нормированными условием $n_y = n_{1y} = n_{2y} = -1$, поэтому $\alpha + \beta = 1$. В первом случае, так как множество точек $(y', x') \in X$ задается неравенством

$$y' - y \geq (x' - x, x' - x) + (n_x, x' - x),$$

и так как неравенство, определяющее транслят параболоида X, задается его нормалью, то $X + t_1$ или $X + t_2$ совпадает с X. В этом случае $Y \subseteq X$. Во втором случае выпишем неравенства, определяющие точки $(y', x') \in Y$:

$$y' - y \geq (x' - x, x' - x) + (n_{1x}, x' - x) y' - y \geq (x' - x, x' - x) + (n_{2x}, x' - x).$$

Теперь сложив эти неравенства с коэффициентами α и β, получим неравенство, определяющее X, что доказывает, что $Y \subseteq X$. Как и в предыдущей теореме, из "опорного принципа" следует, что Y — слагаемое X.
Замечание 1. Для гиперболоида это утверждение неверно. В самом деле, покажем, что соответствующее Y не является слагаемым X. Пусть

$$X = \{x : x_1^2 - x_2^2 - x_3^3 \geq 1\}, \quad Y = (X + (0,0,1)^t) \cap (X + (0,0,-1)^t) \quad \text{и} \quad x = (1,0,0)^t.$$

Перенесем параллельно Y так, чтобы его соответствующая точка y перешла в x, мы получим, что сечение Y плоскостью $x_3 = 0$ не будет содержаться в X, так как это сечение будет менее выпуклой гиперболой, чем соответствующее сечение X.

Автору не известно никаких примеров других строго выпуклых порождающих множеств, и можно сформулировать следующую гипотезу:

Гипотеза 1. В размерности не менее трех среди строго выпуклых множеств только эллипсоиды и параболоиды являются порождающими множествами.

Эта гипотеза не очень правдоподобна, но было бы весьма интересно знать какой-либо контрпример.

Также с помощью теоремы 1 можно было бы доказать известный факт (см. [4]) о том, что любое двумерное выпуклое множество является порождающим, однако для этого случая теорема 1 следует из теоремы Каратеодори и имеющиеся доказательства так или иначе использовали этот факт.

5. Доказательства теорем 2 и 3

В данной работе вопрос о полной характеризации совершенных норм не решается, однако теорема 3 является сравнительно обозримым критерием того, что норма со строго выпуклым единичным шаром — совершенна. Теорема 2 дает достаточный критерий для совершенности нормы.

Из теоремы 2 следуют классические факты (см. [11]) о том, что любая норма в двумерном пространстве и евклидова норма — совершенны (см. [8]). Они сразу следуют из теоремы 4 и того факта, что в двумерном случае любое выпуклое множество является порождающим. Следующая лемма — аналог теоремы 1.

Лемма 7. Норма обладает s-свойством, если шар B_1 дополняем относительно всех двухэлементных множеств T таких, что $\operatorname{diam} T \leq 1$.

Доказательство. Доказательство этой леммы такое же, что и у теоремы 1. Нужно только проверить, что при индукционном переходе от множества T к множеству $T' \cup \{-t_2\}$ диаметр множества не может увеличиться. Так как диаметр множества T не превосходит 1, то множество T содержится в Y. А так как $B_1 - t_2 \supseteq (B_1 + \tau) \cap (B_1 + \sigma) \supseteq Y \supseteq T$, то расстояние от $-t_2$ до любой точки из T не превосходит 1.

Доказательство теоремы 2. По лемме 6 можно считать s-свойство выполненным для нормы $\|\cdot\|$. По предложению нужно доказать, что всякое максимальное множество Y диаметра 1 имеет постоянную ширину. Тогда для любой точки $x \notin Y$ найдется точка $y \in Y$ такая, что $\|x - y\| > 1$, так как иначе множество $Y \cup \{x\}$ будет иметь диаметр 1 и содержать Y. Это означает, что $Y = \cap_{y \in Y}(B_1 + y)$ и, по s-свойству, Y является слагаемым B_1.

Пусть теперь ширина Y в каком-то направлении равна $1 - \epsilon$ ($\epsilon > 0$). Проведем в соответствующем направлении опорную гиперплоскость h и гиперплоскость h' на расстоянии 1 от нее так, что Y лежит между ними и не пересекает h'. По лемме 4 существует такой транслят $B_1 + y$, что $B_1 + y \supseteq Y$ и $(B_1 + y) \cap h' = \emptyset$. Так как Y максимально, то $y \in Y$, но в таком случае y лежит между двумя гиперплоскостями, расстояние между которыми равно 1 и при этом находится на расстоянии больше 1 от одной из них, так как $(B_1 + y) \cap h' = \emptyset$. Противоречие. Значит, ширина Y во всех направлениях равна 1.

Замечание 2. Для нестрого выпуклых тел теорема 2 не верна в обратную сторону. Контрпримером является следующая конструкция единичного шара: возьмем трехмерный куб со стороной 2 и центром в начале координат, и отрежем около его противоположных вершин по пирамидке с боковыми ребрами 1/2.

Множество $Y = B_1 \cap (B_1 + (1/2, -1/2, 0)^t)$ не является слагаемым B_1, так как это будет параллелепипед без отрезанных уголков и с высотой, равной высоте B_1. Достаточно ясно, что трансляты Y не смогут достать до точек на тех ребрах B_1, которые параллельны оси Oz и выходят из отрезанных пирамидок. С другой стороны, экстремальные множества диаметра 1 — это кубы с ребром 1, у которых отрезаны в соответствующих углах две пирамидки, сумма боковых ребер которых (то есть сумма ребра первой и ребра второй) равна 1/2. Нетрудно проверить, что такие экстремальные множества имеют постоянную ширину 1.

Возможно, для строго выпуклых единичных шаров окажется верным следующее утверждение.

Гипотеза 2. Если строго выпуклая норма в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) — совершенна, то она евклидова.

Доказательство теоремы 3. Предположим противное, то есть что существует такой вектор u ($\|u\| \leq 1$), что множество $Y = B_1 \cap (B_1 + u)$ не является слагаемым B_1 и норма $\|\cdot\|$ — совершенна. По лемме 7 в этом случае найдутся такие точка $y \in \operatorname{bd} Y$ и внешняя нормаль n в этой точке, что для точки $x \in B_1$ с такой же внешней нормалью n ни для какой окрестности $U \ni y$

$$Y \cap U + (x - y) \not\subseteq B_1.$$

Выберем такую окрестность U точки y в множестве Y, что диаметр U не превосходит 1. Тогда рассмотрим множество $F = \{0\} \cup \{u\} \cup U$. По предложению найдется максимальное множество $E \supseteq F$.

Ясно, что $\operatorname{diam} E \leq 1$, значит, $E \subseteq B_1 \cap (B_1 + u)$ и n является внешней нормалью к E в точке y. Пусть h — перпендикулярная n опорная гиперплоскость к E в точке y. Норма $\|\cdot\|$ — совершенна, поэтому ширина множества E в направлении n равна 1. Значит, E пересекает гиперплоскость h', находящуюся на расстоянии 1 от h в некоторой точке y'. Тогда очевидно $\|y - y'\| = 1$ и $E \subseteq B_1 + y'$. При этом n будет нормалью к $B_1 + y'$ в точке y ($B_1 + y'$ не выходит за гиперплоскость h, так как расстояние между h и h' равно 1). Получаем, что множество E и, следовательно, множество $Y \cap U$ попало в транслят B_1 так, что n является внешней нормалью к $B_1 + y'$ в точке y (при этом требуемая точка $x \in B_1$ определится как $x = y - y'$). Это противоречит выбору точки y.

6. Заключение

У автора есть предположение, что множество в трехмерном пространстве, состоящее из цилиндра и двух полушаров, прикрепленных к его торцам, является порождающим. Возможно обобщение определения сильной выпуклости на сильную выпуклость относительно семейства множеств, а не одного множества. Было бы интересно выяснить, какие аналоги свойства быть порождающим множеством и теоремы 1 можно доказать в этом случае. Автор весьма признателен Е.С. Половинкину за обсуждение результатов, которое позволило сделать изложение более кратким и ясным.

Литература

[1] Рокафеллар Р.Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

[2] Половинкин Е.С., Балашов М.В. M-сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества //Математический сборник. 2000. **191**. №. 1. С. 27–64.

[3] Wieacker J.A. Helly-type decomposition theorems for convex sets //Arch. Math. 1988. **50**. P. 59–67.

[4] Geivaerts M. Enkele eigenschappen van de relatie "homothetisch aanpasselijk" in de ruimte der konvexe lichamen //Med. Konink. Acad. Wetensch. België. 1972. **34**. P. 3 – 19.

[5] McMullen P., Schneider R. and Shepherd G.C., Monotypic polytopes and their intersection properties //Geom. Dedicata. 1974. **3**. P. 99 – 129.

[6] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

[7] Chakerian G.D., Groemer H. Convex Bodies of Constant Width. in: Convexity and Its Applications, eds P.M. Gruber and J.M. Wills. Birkhäuser, Basel, 1983. P. 49 – 96.

[8] Bonnesen T., Fenchel W. Theorie der konvexen Körper. Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Bd. 3, J. Springer Verl., Berlin, 1934.

[9] Groemer H. On complete convex bodies //Geom. Dedicata. 1986. **20**. P. 319 – 334.

[10] Eggleston H.G. Sets of constant width in finite dimensional Banach spaces //Israel J. Math. 1965. **3**. P. 163–172.

[11] Meissner E. Über Punktmengen konstanter Breite. Vierteljahresschr. naturforsch. Ges. Zürich. 1911. **56**. P. 42 – 50.