СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
17 МАЯ 2026 ГОДА

1. Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $\rho(x, y) = f(x - y)$ оказалась метрикой на прямой $\mathbb{R}$. Верно ли, что неравенство $f(x) \geq c|x|$ выполняется в некоторой окрестности нуля для некоторой константы $c > 0$?

Ответ: да.

Решение. Заметим, что свойства метрики равносильны тому, что $f(x) \geq 0$, $f(x) = 0$ только при $x = 0$ (невырожденность), $f(x)$ чётная (симметричность) и $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ (неравенство треугольника).

Предположим противное: это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $x_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ такое, что $f(x_\varepsilon) < \varepsilon x_\varepsilon$. Зафиксируем какое-то $x_0 > 0$, а ε будем менять. Пусть $n_\varepsilon = \lfloor x_0/\varepsilon \rfloor$, тогда $|x_0 - n_\varepsilon x_\varepsilon| < \varepsilon$. Кроме того, по неравенству треугольника

$$f(n_\varepsilon x_\varepsilon) < \varepsilon n_\varepsilon x_\varepsilon < \varepsilon(x_0 + \varepsilon).$$

Когда $\varepsilon \to +0$, получается $f(n_\varepsilon x_\varepsilon) \to 0$ и $n_\varepsilon x_\varepsilon \to x_0$. Тогда по непрерывности $f(x_0) = 0$, что противоречит невырожденности метрики.

Замечание. Если отбросить условие того, что f непрерывна, то ответ будет отрицательный.

2. Пусть $A = SU$ — полярное разложение матрицы A размера $n \times n$, в котором S неотрицательно определена, а U — ортогональна. Известно, что на диагонали матрицы S стоят единицы. Докажите, что сумма квадратов диагональных элементов матрицы A не более n.

Решение. С помощью диагонализации матрицы S в каком-то ортогональном базисе нетрудно подобрать неотрицательно определённую матрицу T, такую что $S = T^2$. Тогда свойство диагональных элементов S можно переформулировать так, что строки и столбцы матрицы T имеют единичные суммы квадратов.

Рассмотрим матрицу $W = TU$. В силу ортогональности U строки матрицы W имеют единичные суммы квадратов. Следовательно, сумма квадратов элементов матрицы W равна n. Записав $A = TW$, мы получим для суммы квадратов её диагональных элементов

$$\sum_i a_{ii}^2 = \sum_i \left(\sum_j t_{ij} w_{ji} \right)^2 \leq \sum_i \left(\sum_j t_{ij}^2 \right) \cdot \left(\sum_j w_{ji}^2 \right) = \sum_i \sum_j w_{ji}^2 = n.$$

Здесь использовано неравенство Коши–Буняковского и свойство строк матрицы T, $\sum_j t_{ij}^2 = 1$.

3. Пусть $n \geq 3$ и $1 \leq k \leq n - 1$ — натуральные числа, V — множество вершин правильного симплекса $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, а W — множество проекций центров всех k-мерных граней симплекса Δ из его центра на его описанную сферу Ω. Может ли быть так, что некоторый эллипсоид $E \subset \mathbb{R}^n$ (аффинный образ шара) содержит множество V и не пересекает множество W?

Ответ: нет.

Решение. Сначала докажем лемму:

Лемма. Пусть $\mathfrak{S}_{n+1}$ — группа симметрий Δ. Если эллипсоид E' инвариантен относительно $\mathfrak{S}_{n+1}$, то он является шаром с центром в центре Δ.

Доказательство. Ясно, что $\mathfrak{S}_{n+1}$ оставляет на месте только центр Δ — для определённости пусть это начало координат. Также $\mathfrak{S}_{n+1}$ оставляет на месте центр E', то есть центр E' тоже в начале координат. Тогда можно считать, что E' задан неравенством $b(x,x) \leq 1$, где b — симметричная билинейная форма. Если это неравенство инвариантно относительно действия $\mathfrak{S}_{n+1}$, то $b(x,x) = b(gx,gx)$ для любого $g \in \mathfrak{S}_{n+1}$. Так как

$$b(x,y) = \frac{b(x+y,x+y) - b(x,x) - b(y,y)}{2},$$

то отсюда следует, что $b(x,y) = b(gx,gy)$ для любых векторов x и y и любого $g \in \mathfrak{S}_{n+1}$.

Заметим теперь, что $\mathfrak{S}_{n+1}$ состоит из всех перестановок вершин, а значит транзитивно действует на парах вершин. Следовательно, матрица Грама b относительно системы векторов V (вершины Δ) имеет одно и то же число на диагонали, и одно и то же число во всех недиагональных позициях. Кроме того, так как сумма векторов V равна нулю, то сумма элементов матрицы Грама равна нулю. Таким образом, матрица Грама b определена однозначно с точностью до скалярного множителя. То есть b совпадает со скалярным произведением в $\mathbb{R}^n$ (которое очевидно $\mathfrak{S}_{n+1}$-инвариантно) с точностью до скалярного множителя. Тогда уравнение $b(x,x) = ax \cdot x \leq 1$ задаёт шар с центром в начале координат. □

Вернёмся к задаче. Пусть E задан квадратичным уравнением $f(x) \leq 0$. Предположим описанное в задаче — что $f(v) \leq 0$ при $v \in V$ и $f(w) > 0$ при $w \in W$. Рассмотрим новую квадратичную функцию

$$F(x) = \sum_{g \in \mathfrak{S}_{n+1}} f(gx).$$

В силу $\mathfrak{S}_{n+1}$-инвариантности V и W, всё ещё верно, что $F(v) \leq 0$ при $v \in V$ и $F(w) > 0$ при $w \in W$. Кроме того, уравнение $F(x) \leq 0$ задаёт G-инвариантный эллипсоид, который по лемме обязан быть шаром с центром в центре Δ. Но если шар содержит V, то он содержит и всю сферу Ω, а значит, и множество W. Противоречие.

4. Докажите, что при $\alpha \in (0,2)$ преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1}{1+|x|^\alpha}$,

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{-ixy}}{1+|x|^\alpha}\, dx,$$

положительно для всех $y \in \mathbb{R}$.

Решение. Преобразование Фурье чётной функции можно записать в виде

$$\hat{f}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos yx}{1+x^\alpha}\, dx,$$

где интеграл очевидно положителен при $y = 0$, а при $y \neq 0$ и $\alpha \in (0,1]$ сходится условно, что не мешает верности формулы при определении преобразования Фурье как интеграла в смысле главного значения. Перепишем его в виде

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{f}(y) = \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \frac{e^{iyz}}{1+z^\alpha}\, dz,$$

понимая это как интеграл по действительной полуоси. Интегральная формула Коши позволяет его переписать как интеграл по мнимой полуоси, если мы оценим интеграл по дуге $\{Re^{i\varphi} \mid 0 \le \varphi \le \pi/2\}$ при $R \to +\infty$ следующим образом

$$\left| \int_0^{\pi/2} \frac{e^{iyRe^{i\varphi}}}{1 + R^\alpha e^{i\alpha\varphi}} \, Rid\varphi \right| \le \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-yR\sin\varphi}}{R^\alpha - 1} \, Rd\varphi \le$$
$$\le \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\frac{2Ry}{\pi}\varphi}}{R^\alpha - 1} \, Rd\varphi \le \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{2Ry}{\pi}\varphi}}{R^\alpha - 1} \, Rd\varphi = \frac{R\pi}{(R^\alpha - 1)2Ry} = \frac{\pi}{(R^\alpha - 1)2y} \to 0.$$

Теперь можно перейти к интегралу по мнимой полуоси:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{f}(y) = \mathrm{Re} \int_0^{+\infty} \frac{ie^{-yt}}{1 + i^\alpha t^\alpha} \, dt.$$

При $\alpha \in (0, 2)$ мнимая часть числа $1 + i^\alpha t^\alpha$ положительна, как и действительная часть числа $\frac{i}{1+i^\alpha t^\alpha}$. Отсюда следует положительность действительной части всего интеграла.