СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

17 МАЯ 2026 ГОДА

1. Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $\rho(x, y) = f(x - y)$ оказалась метрикой на прямой $\mathbb{R}$. Верно ли, что неравенство $f(x) \geq c|x|$ выполняется в некоторой окрестности нуля для некоторой константы $c > 0$?

2. Пусть $A = SU$ — полярное разложение матрицы A размера $n \times n$, в котором S неотрицательно определена, а U — ортогональна. Известно, что на диагонали матрицы S стоят единицы. Докажите, что сумма квадратов диагональных элементов матрицы A не более n.

3. Пусть $n \geq 3$ и $1 \leq k \leq n - 1$ — натуральные числа, V — множество вершин правильного симплекса $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, а W — множество проекций центров всех k-мерных граней симплекса Δ из его центра на его описанную сферу Ω. Может ли быть так, что некоторый эллипсоид $E \subset \mathbb{R}^n$ (аффинный образ шара) содержит множество V и не пересекает множество W?

4. Докажите, что при $\alpha \in (0, 2)$ преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1}{1+|x|^\alpha}$,

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{-ixy}}{1 + |x|^\alpha}\, dx,$$

положительно для всех $y \in \mathbb{R}$.