

**СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ**  
21 МАЯ 2023 ГОДА

1. В  $\mathbb{R}^n$  дан  $n - 1$  вектор, координаты каждого — целые числа с нулевой суммой. Докажите, что  $(n - 1)$ -мерный объём  $(n - 1)$ -мерного параллелепипеда  $P$ , натянутого на эти векторы, является произведением целого числа и  $\sqrt{n}$ .

2. Пусть  $A = (a_{ij})$  — симметричная матрица из действительных чисел. Докажите неравенство

$$\sum_i e^{a_{ii}} \leq \operatorname{tr} e^A.$$

3. Докажите, что если множество  $X \subset \mathbb{S}^n$  занимает больше половины риманова объёма единичной сферы  $\mathbb{S}^n$ , то множество всевозможных геодезических отрезков длины не более  $\pi$  с концами в множестве  $X$  покрывает всю сферу. *Геодезическая на сфере  $\mathbb{S}^n$*  — это кривая, лежащая на некоторой окружности пересечения сферы  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  двумерным линейным подпространством  $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

4. Верно ли, что если два линейных подпространства  $V$  и  $W$  гильбертова пространства замкнуты, то их сумма  $V + W$  тоже замкнута?