СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
11 ДЕКАБРЯ 2022 ГОДА

1. Докажите, что если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ограничена и её график замкнут как подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, то функция f непрерывна.

Решение. Пусть $x_n \to x_0$. Последовательность $f(x_n)$ тогда ограничена и, следовательно, имеет конечные частичные пределы. Пусть один из них равен A. Тогда последовательность точек графика $(x_n, f(x_n))$ имеет частичным пределом точку (x_0, A). Из замкнутости графика, эта точка должна лежать на графике f, то есть $A = f(x_0)$.

Мы доказали, что все частичные пределы $f(x_n)$ равны $f(x_0)$. По теореме о единственном частичном пределе, просто предел $f(x_n)$ равен $f(x_0)$, то есть выполняется определение непрерывности функции f по Гейне.

Топологическое решение. Достаточно доказать непрерывность ограничения f на любой отрезок $[a, b]$. Так что далее областью определения f считаем отрезок $[a, b]$, график при ограничении пересекается с замкнутым множеством $[a, b] \times \mathbb{R}$ и остаётся замкнутым.

По топологическому определению непрерывности надо доказать, что для любого открытого множества $U \subseteq \mathbb{R}$ его прообраз $f^{-1}(U)$ открыт в $[a, b]$. Эквивалентно, для любого замкнутого $F \subseteq \mathbb{R}$ его прообраз $f^{-1}(F)$ замкнут в $[a, b]$.

График Γ_f и множество $[a, b] \times F$ замкнуты, тогда их пересечение $D = \Gamma_f \cap [a, b] \times F$ тоже замкнуто и ограничено, следовательно компактно. А его проекция P на отрезок $[a, b]$ (оси $0x$) тогда будет компактной как непрерывный образ компакта. По построению, проекция P есть в точности множество таких $x \in [a, b]$, что $f(x) \in F$. То есть множество $f^{-1}(F)$ оказалось компактным и, следовательно, замкнутым подмножеством отрезка $[a, b]$.

2. Пусть $n \geq 3$ — целое число. Найдите минимальную степень одного алгебраического (полиномиального) уравнения, которое задаёт множество вершин правильного n-угольника на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Ответ: если n чётное, то n; если n нечётное, то $n + 1$.

Решение. Для $n = 2k$ разобьём точки на пары противоположных и проведём через каждую пару прямую с уравнением $\ell_i(x, y) = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Пусть многоугольник вписан в окружность с квадратичным уравнением $Q(x, y) = 0$. Тогда

$$\ell_1(x, y)^2 \ldots \ell_k(x, y)^2 + Q(x, y)^2 = 0$$

есть уравнение степени $2k$, задающее множество вершин n-угольника.

Для $n = 2k - 1$, действуем аналогично, получаем $k - 1$ пару точек с уравнениями прямых $\ell_1(x, y) = 0$, $i = 1, \ldots, k - 1$. Для оставшейся без пары точки возьмём в качестве $\ell_k(x, y) = 0$ уравнение касательной к окружности $Q(x, y) = 0$ в этой точке. Написанное выше уравнение тогда задаёт нужное нам множество точек.

Покажем, что степень задающего множество вершин уравнения не может быть меньше n и обязана быть чётной, из этого следует утверждение задачи. Пусть уравнение имеет вид $P(x, y) = 0$. Тогда множество, в котором $P(x, y) \neq 0$ связно, а значит P не меняет знак. Степень P тогда не может быть нечётной, так как иначе для некоторого направления $\bar{u}$ (на котором не обнуляется старшая однородная компонента

P) степень многочлена $f(t) = P(\bar{p} + t\bar{u})$ тоже будет нечётной. Но тогда f (и P тоже) будет принимать значения обоих знаков, что мы исключили. Таким образом, степень P чётна и P не меняет знак.

Ограничение P на окружность тогда имеет n корней и не меняет знак, то есть имеет n корней кратности не менее 2. Аффинно преобразовав окружность в единичную и рационально параметризовав её стандартным образом, получим, что уравнение

$$P\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) = 0$$

имеет $2n$ корней с учётом кратностей. Но после домножения на $(1+t^2)^{\deg P}$ это выражение станет многочленом от t степени не более $2\deg P$. Отсюда следует, что степень P не менее n.

3. Сколько есть способов (в смысле мощности) представить число 1 в виде конечной или бесконечной суммы некоторого подмножества множества

$$\{\varphi^{-n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}?$$

Здесь $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение.

Ответ: счётное число.

Решение. Заметим два тождества

$$\varphi^{-n} = \varphi^{-(n+1)} + \varphi^{-(n+2)}, \quad \varphi^{-n} = \sum_{k=n+2} \varphi^{-k}.$$

Первое из них позволяет, начав с представления $1 = \varphi^{-0}$, размножать такие представления единицы в виде суммы бесконечным числом способов.

Докажем теперь, что способов не более чем счётное число. Будем двигаться по возрастанию номера n и смотреть, участвуют ли φ^{-n} и φ^{-n-1} в сумме, которая равна φ^{-n}

- Если участвует φ^{-n}, то это и есть вся сумма.
- Если не участвует φ^{-n} и не участвует φ^{-n-1}, то второе тождество показывает, что должны участвовать все φ^{-k}, $k \geq n+2$ и построение суммы завершено.
- Если не участвует φ^{-n} и участвует φ^{-n-1}, то в силу первого тождества осталось представить φ^{-n-2} в виде суммы некоторых чисел из оставшихся φ^{-k}, $k \geq n+2$.
- В последнем случае, увеличив n на два, опять приходим в первому пункту.

На каждом цикле этой схемы все, кроме одного, варианты завершаются одним представлением в виде суммы. Если циклы никогда не завершаются, то получается ещё одно представление в виде суммы (нечётных степеней φ^{-1}). Следовательно, всего представлений в виде суммы счётное число.

4. В пространстве $\mathbb{R}^n$ дано конечное множество точек X. Известно, что для любого подмножества $Y \subseteq X$ из не более $n+1$ точки найдётся единичный шар B_Y, содержащий Y и не содержащий начало координат. Докажите, что найдётся единичный шар B_X, содержащий X и не содержащий начало координат.

Решение. Множество центров подходящих в условии задачи шаров для множества $Y = \{x\}$ равно

$$F_x = B_x \setminus B_0,$$

где B_x обозначает единичный шар с центром в x и аналогично B_0. Множество центров шаров, подходящих в условии для Y тогда

$$F_Y = \bigcap_{x \in Y} B_x \setminus B_0 = \bigcap_{x \in Y} F_x.$$

Мы знаем, что любые $\le n+1$ множества из $\{F_x\}_{x \in X}$ имеют общую точку и хотим найти общую точку у них всех. Это похоже на условие теоремы Хелли в $\mathbb{R}^n$, только у нас нет выпуклости.

Рассмотрим тогда выпуклые множества $G_x = \operatorname{conv} F_x$ и применим теорему Хелли к ним. Нам понадобится очевидное свойство, что G_x отличается от F_x только добавлением некоторой части в шаре B_0. По теореме Хелли найдётся общая точка $c \in \bigcap_{x \in X} G_x$. Если c лежит за пределами B_0, то точка c общая и для F_x и задача решена. Иначе пусть $c' = tc$ при некотором положительном t так, что c' за пределами B_0, но не далее $\varepsilon > 0$ от него.

Рассмотрим теперь какую-то $x \in X$. Можно заметить, что из $c \in G_x$ следует, что $c' \in F_x$ при достаточно малом ε, это по сути двумерное утверждение и его легко понять, нарисовав рисунок. Выбрав ε достаточно малым для всех $x \in X$, мы получим общую точку к всех F_x и задача будет решена.

Альтернативная концовка решения. Инверсия относительно сферы ∂B_0 делает множества F_x выпуклыми, после чего обычная теорема Хелли решает вопрос.