СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

15 МАЯ 2022 ГОДА

1. Последовательность равномерно непрерывных функций $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно сходится к функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Можно ли утверждать, что f равномерно непрерывна?

2. Докажите, что всякое сечение куба $Q = [-1, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ линейным k-мерным подпространством $L \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет диаметр не менее $2\sqrt{k}$.

3. Докажите, что для любых двух линейных подпространств $V, W \subset \mathbb{R}^n$ одинаковой размерности найдётся ортогональное преобразование $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такое что $A(V) = W$ и $A(W) = V$.

4. Рассмотрим бесконечные в обе стороны последовательности комплексных чисел $c = (c_k)$, $k \in \mathbb{Z}$, с конечной нормой $\|c\| = \sqrt{\sum_k |c_k|^2}$. Пусть T_m — это операция сдвига последовательности на m, $(T_m c)_k = c_{k-m}$. Докажите, что для всякой последовательности c с конечной нормой норма последовательности

$$\frac{T_0 c + T_1 c + \cdots + T_{n-1} c}{n}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Сложение и умножение последовательности на число определены покомпонентно.