СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

12 ДЕКАБРЯ 2021 Г.

1–2 КУРС

1. Вектору $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ сопоставим его вектор знаков

$$\operatorname{sgn} \bar{x} = (\operatorname{sgn} x_1, \ldots, \operatorname{sgn} x_n).$$

Докажите, что для всякого k-мерного линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$ функция sgn принимает не менее 3^k разных значений на L.

Решение. Выберем некоторый базис в L и запишем его как строки матрицы размера $k \times n$. Элементарно преобразуя строки по методу Гаусса (что соответствует переходу к другому базису L) и делая перестановки столбцов (что соответствует перестановкам координат в $\mathbb{R}^n$) получим матрицу, у которой левая подматрица $k \times k$ единичная. Для такого базиса в пространстве L очевидно, что можно получить все возможные комбинации знаков в первых k позициях, то есть не менее 3^k комбинаций знаков векторов из L.

2. Пусть G — абелева группа мощности ab, а $B \subset G$ — её подмножество мощности b; $a, b > 1$ — целые числа. Докажите, что некоторые a сдвигов множества B покроют не менее 60% элементов группы G.

Решение. Будем покрывать группу G сдвигами B жадным алгоритмом. На этапе, когда не покрыто n элементов из G, подходящий сдвиг B может покрыть не менее n/a ещё не покрытых элементов G. Это верно потому, что всевозможные сдвиги B покрывают каждую точку ровно b раз и в среднем содержат n/a непокрытых ещё элементов G.

Следовательно, количество непокрытых элементов на следующем шаге не более $(1 - 1/a)n$. Через a шагов непокрытыми окажется не более

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)^a ab \le \frac{ab}{e} \le \frac{2ab}{5}$$

элементов G. Здесь использован частный случай факта из определения экспоненты – что последовательность $(1 - 1/n)^n$ возрастает и имеет предел e^{-1}.

3. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая принимает ненулевые значения в рациональных точках, нулевые значения в иррациональных точках, и дифференцируема в иррациональных точках?

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что такая функция существует. Заметим, что так как в любой окрестности иррациональной точки x_0 есть другие иррациональные точки, то производная в ней равна нулю.

Начав с числа $x_1 = 0$, можно построить последовательность рациональных чисел (x_k) так, что $x_{k+1} - x_k = 2^{-N_k}$, выбирая $2^{-N_k} < |f(x_k)|$.

Если степени N_k выбирать достаточно быстро растущими, то предел $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ будет иррациональным как непереодическая двоичная дробь. Взяв определение производной по Гейне, получим

$$f'(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k) - f(x)}{x_k - x} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k)}{\sum_{\ell=k}^{\infty} 2^{-N_\ell}}.$$

Так как степени N_ℓ растут, то знаменатель дроби оценивается сверху как $2 \cdot 2^{-N_k}$, а число под знаком предела по модулю оказывается не менее

$$\frac{|f(x_k)|}{2^{1-N_k}} \geq \frac{1}{2}.$$

Получается, что производная всё таки не равна нулю, противоречие.

Решение. Предположим, что такая функция существует. Заметим, что так как в любой окрестности иррациональной точки x_0 есть другие иррациональные точки, то производная в ней равна нулю. Запишем определение нулевой производной в точке x_0 как предела с $\varepsilon = 1$ и $\delta = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$|x - x_0| < \frac{1}{k} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|.$$

Отнесём точку $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ к множеству X_k, если $\delta = 1/k$ в определение производной в этой точке подходит. Положим $Y_k = X_k \cup \{r_k\}$, где (r_k) — некоторая последовательность, пробегающая все рациональные числа. Тогда

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k,$$

и по теореме Бэра замыкание какого-то Y_k содержит интервал (a, b). Уменьшив этот интервал, можем считать $r_k \notin (a, b)$. Тогда замыкание X_k будет содержать интервал (a, b).

Для любого x и $x_0 \in X_k$ выполняется

$$|x - x_0| < 1/k \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |f(x)| \leq |x - x_0|$$

Зафиксируем $x \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$. Для любого натурального m, находя $x_0 \in X_k$ на расстоянии менее $\min\{1/m, 1/k\}$ от x (это возможно из плотности X_k на интервале), получим, что

$$|f(x)| \leq 1/m.$$

Так как это верно для любого m, то $|f(x)| = 0$, противоречие.

4. Докажите, что функция от x

$$f(x) = \cos(x - x_1)\cos(x - x_2)\ldots\cos(x - x_n)$$

достигает максимума модуля в точке, находящейся не расстоянии не менее $\frac{\pi}{2n}$ от каждого из множеств своих нулей $\{x_i + \pi/2 + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Решение. Заметим, что тригонометрический многочлен степени не более n имеет не более $2n$ корней с учётом кратности на свой период 2π или тождественно равен нулю. Это можно объяснить сведением к утверждению, что алгебраический многочлен от двух переменных степени не более n имеет не более $2n$ нулей с учётом кратности на окружности (кривой степени два) или тождественно равен нулю на ней.

Предположим, что f достигает максимума модуля M в начале координат, этого можно добиться сдвигом. Рассмотрим тогда тригонометрический многочлен степени не более n

$$g(x) = f(x) \pm M \cos nx.$$

При подходящем выборе знака $\pm$ функция g имеет нуль кратности 2 в точках вида $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Далее подразумеваем такой выбор знака. Кроме того, для $m = 1, \dots, 2n-1$ выражение

$$g\left(\frac{m\pi}{n}\right) = f\left(\frac{m\pi}{n}\right) \pm M \cos m\pi = f\left(\frac{m\pi}{n}\right) \pm M(-1)^m$$

либо имеет знак, равный $\pm(-1)^m$, либо g имеет в точке $\pi m/n$ нуль кратности два. Аккуратно применяя теорему о промежуточном значении, отсюда выводим наличие не менее $2n-2$ нулей g с учётом кратности на отрезке $\left[\frac{\pi}{n}, \frac{(2n-1)\pi}{n}\right]$. А именно, в случае ненулевых значений на концах маленького отрезка $\left[\frac{m\pi}{n}, \frac{(m+1)\pi}{n}\right]$, $m = 1, \dots, 2n-2$, мы находим нуль g в его внутренности, а если g имеет нуль кратности два в точке $\pi m/n$, то эти два нуля мы «приписываем» в двух маленьким интервалам с концами в этой точке.

С учётом нуля кратности два в начале координат, получается, что мы нашли у g уже $2n$ нулей на период с учётом кратности. Более того, если g имела нуль в какой-то из точек $\frac{-\pi}{n}$ или $\frac{\pi}{n}$, то это нуль кратности два, найденное количество нулей превышает $2n$ и заставляет g быть тождественно равной нулю.

Значит, либо g тождественно равна нулю (тогда $f(x) = \pm M \cos nx$ и утверждение задачи верно), либо она не имеет нулей на множестве

$$\left[\frac{-\pi}{n}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{n}\right].$$

В частности, если $M > 0$, то на отрезке $\left[\frac{-\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]$ выполняется неравенство

$$f(x) \geq M \cos nx,$$

а если $M < 0$, то выполняется противоположное неравенство. В обоих случаях это значит, что на интервале $\left(\frac{-\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right)$ у f нет нулей. Это и требуется доказать в задаче.

Это решение проходит, если в качестве f брать любой тригонометрический многочлен степени не более n и оценивать расстояние от его точки максимума до его множества нулей. См. подробности в тексте arxiv:2112.05382 и в текстах по ссылкам оттуда.

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
12 ДЕКАБРЯ 2021 Г.

3–6 КУРС

1. Вектору $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ сопоставим его вектор знаков

$$\operatorname{sgn} \bar{x} = (\operatorname{sgn} x_1, \ldots, \operatorname{sgn} x_n).$$

Докажите, что для всякого k-мерного линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$ функция sgn принимает не менее 3^k разных значений на L.

Решение. Выберем некоторый базис в L и запишем его как строки матрицы размера $k \times n$. Элементарно преобразуя строки по методу Гаусса (что соответствует переходу к другому базису L) и деля перестановки столбцов (что соответствует перестановкам координат в $\mathbb{R}^n$) получим матрицу, у которой левая подматрица $k \times k$ единичная. Для такого базиса в пространстве L очевидно, что можно получить все возможные комбинации знаков в первых k позициях, то есть не менее 3^k комбинаций знаком векторов из L.

2. Пусть G — абелева группа мощности ab, а $B \subset G$ — её подмножество мощности b; $a, b > 1$ — целые числа. Докажите, что некоторые a сдвигов множества B покроют не менее 60% элементов группы G.

Решение. Будем покрывать группу G сдвигами B жадным алгоритмом. На этапе, когда не покрыто n элементов из G, подходящий сдвиг B может покрыть не менее n/a ещё не покрытых элементов G. Это верно потому, что всевозможные сдвиги B покрывают каждую точку ровно b раз и в среднем содержат n/a непокрытых ещё элементов G.

Следовательно, количество непокрытых элементов на следующем шаге не более $(1 - 1/a)n$. Через a шагов непокрытыми окажется не более

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)^a ab \leq \frac{ab}{e} \leq \frac{2ab}{5}$$

элементов G. Здесь использован частный случай факта из определения экспоненты – что последовательность $(1 - 1/n)^n$ возрастает и имеет предел e^{-1}.

3. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая принимает ненулевые значения в рациональных точках, нулевые значения в иррациональных точках, и дифференцируема в иррациональных точках?

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что такая функция существует. Заметим, что так как в любой окрестности иррациональной точки x_0 есть другие иррациональные точки, то производная в ней равна нулю.

Начав с числа $x_1 = 0$, можно построить последовательность рациональных чисел (x_k) так, что $x_{k+1} - x_k = 2^{-N_k}$, выбирая $2^{-N_k} < |f(x_k)|$.

Если степени N_k выбирать достаточно быстро растущими, то предел $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ будет иррациональным как непереодическая двоичная дробь. Взяв определение производной по Гейне, получим

$$f'(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k) - f(x)}{x_k - x} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k)}{\sum_{\ell=k}^{\infty} 2^{-N_\ell}}.$$

Так как степени N_ℓ растут, то знаменатель дроби оценивается сверху как $2 \cdot 2^{-N_k}$, а число под знаком предела по модулю оказывается не менее

$$\frac{|f(x_k)|}{2^{1-N_k}} \geq \frac{1}{2}.$$

Получается, что производная всё таки не равна нулю, противоречие.

Решение. Предположим, что такая функция существует. Заметим, что так как в любой окрестности иррациональной точки x_0 есть другие иррациональные точки, то производная в ней равна нулю. Запишем определение нулевой производной в точке x_0 как предела с $\varepsilon = 1$ и $\delta = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$|x - x_0| < \frac{1}{k} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|.$$

Отнесём точку $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ к множеству X_k, если $\delta = 1/k$ в определение производной в этой точке подходит. Положим $Y_k = X_k \cup \{r_k\}$, где (r_k) — некоторая последовательность, пробегающая все рациональные числа. Тогда

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k,$$

и по теореме Бэра замыкание какого-то Y_k содержит интервал (a, b). Уменьшив этот интервал, можем считать $r_k \notin (a, b)$. Тогда замыкание X_k будет содержать интервал (a, b).

Для любого x и $x_0 \in X_k$ выполняется

$$|x - x_0| < 1/k \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |f(x)| \leq |x - x_0|$$

Зафиксируем $x \in (a, b) \cap \mathbb{Q}$. Для любого натурального m, находя $x_0 \in X_k$ на расстоянии менее $\min\{1/m, 1/k\}$ от x (это возможно из плотности X_k на интервале), получим, что

$$|f(x)| \leq 1/m.$$

Так как это верно для любого m, то $|f(x)| = 0$, противоречие.

4. Пусть $P(z_1, z_2)$ — однородный многочлен от двух комплексных переменных степени n. Докажите, что любая точка, в которой $|P|$ принимает максимум на единичной сфере $S^3 \subset \mathbb{C}^2$, находится на расстоянии (во внутренней метрике сферы) не менее $\arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$ от пересечения множества нулей многочлена P со сферой S^3.

Решение. Заметим что $|P|$ есть функция на комплексной аффинной прямой $\mathbb{C}P^1 = S^3/S^1$, где $S^1 \subset \mathbb{C}$ — комплексные числа единичного модуля. Выберем аффинную координату $z = x+iy$ на проективной прямой так, чтобы $P(0) = 0$. В таких координатах точке $z \in \mathbb{C}$ соответствует точка

$$\left(\frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}\right) \in S^3$$

и изучаемый нами модуль многочлена принимает вид

$$|P| = |zQ(z)| \left(1+|z|^2\right)^{-n/2}.$$

Вращая эти координаты, можно добиться, что точка максимума модуля будет в $a \in \mathbb{R}^+$. Напишем дифференциал $\ln |P|$

$$d\ln |P| = \operatorname{Re} \frac{dz}{z} + \operatorname{Re} \frac{Q'dz}{Q} - n\frac{xdx+ydy}{1+|z|^2}$$

и приравняем его нулю в точке максимума a

$$\frac{dx}{a} + \operatorname{Re} \frac{Q'dz}{Q} - n\frac{adx}{1+a^2} = 0 \Rightarrow d\ln |Q| = \operatorname{Re} \frac{Q'dz}{Q} = \left(\frac{na}{1+a^2} - \frac{1}{a}\right) dx.$$

Заметим, что если

$$\frac{na}{1+a^2} - \frac{1}{a} < 0 \Leftrightarrow a^2 < \frac{1}{n-1},$$

то $\ln |Q|$ увеличится при замене a на некоторую $a - \varepsilon$ при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$. Из принципа максимума тогда последует, что $|Q|$ будет строго больше, чем $|Q(a)|$ в некоторой точке окружности $\{|z| = a\}$. Но тогда и $|P|$ будет в этой точке больше $|P(a)|$ — противоречие с выбором a.

Следовательно, $a^2 \geq \frac{1}{n-1}$. В терминах расстояний на сфере S^3, нам надо оценить снизу расстояние между $p_0 = (0, 1)$ и

$$p_a = \left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right),$$

которое равно

$$\arccos |p_0 \cdot p_a| = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \geq \arccos \sqrt{\frac{n-1}{n}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Про обобщения этого утверждения и нерешённые задачи в этой области см. подробности в тексте arxiv:2112.05382 и в текстах по ссылкам оттуда.