СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
12 ДЕКАБРЯ 2021 Г.

1–2 КУРС

1. Вектору $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ сопоставим его вектор знаков

$$\operatorname{sgn} \bar{x} = (\operatorname{sgn} x_1, \dots, \operatorname{sgn} x_n).$$

Докажите, что для всякого k-мерного линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$ функция sgn принимает не менее 3^k разных значений на L.

2. Пусть G — абелева группа мощности ab, а $B \subset G$ — её подмножество мощности b; $a, b > 1$ — целые числа. Докажите, что некоторые a сдвигов множества B покроют не менее 60% элементов группы G.

3. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая принимает ненулевые значения в рациональных точках, нулевые значения в иррациональных точках, и дифференцируема в иррациональных точках?

4. Докажите, что функция от x

$$f(x) = \cos(x - x_1)\cos(x - x_2)\dots\cos(x - x_n)$$

достигает максимума модуля в точке, находящейся не расстоянии не менее $\frac{\pi}{2n}$ от каждого из множеств своих нулей $\{x_i + \pi/2 + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

12 ДЕКАБРЯ 2021 Г.

3–6 КУРС

1. Вектору $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ сопоставим его вектор знаков

$$\operatorname{sgn} \bar{x} = (\operatorname{sgn} x_1, \ldots, \operatorname{sgn} x_n).$$

Докажите, что для всякого k-мерного линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$ функция sgn принимает не менее 3^k разных значений на L.

2. Пусть G — абелева группа мощности ab, а $B \subset G$ — её подмножество мощности b; $a, b > 1$ — целые числа. Докажите, что некоторые a сдвигов множества B покроют не менее 60% элементов группы G.

3. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая принимает ненулевые значения в рациональных точках, нулевые значения в иррациональных точках, и дифференцируема в иррациональных точках?

4. Пусть $P(z_1, z_2)$ — однородный многочлен от двух комплексных переменных степени n. Докажите, что любая точка, в которой $|P|$ принимает максимум на единичной сфере $S^3 \subset \mathbb{C}^2$, находится на расстоянии (во внутренней метрике сферы) не менее $\arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$ от пересечения множества нулей многочлена P со сферой S^3.