СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

12 МАЯ 2019 ГОДА

1. Докажите, что вектор-строки $v_1, \dots, v_k$ длины n порождают всё пространство $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда матрица

$$B = v_1^T v_1 + v_2^T v_2 + \dots + v_k^T v_k$$

невырожденна.

Решение. Интерпретируем v_i как линейные формы на $\mathbb{R}^n$. Тогда указанная в задаче матрица соответствует билинейной форме

$$b(x, y) = v_1(x)v_1(y) + \dots + v_k(x)v_k(y),$$

которой в свою очередь соответствует неотрицательно определённая квадратичная форма

$$q(x) = v_1(x)^2 + \dots + v_k(x)^2.$$

Линейные формы v_i не порождают всё $(\mathbb{R}^n)^*$ тогда и только тогда, когда у них есть нетривиальное общее ядро $L \subseteq \mathbb{R}^n$, $L \neq 0$. Но из определения q видно, что общее ядро v_i в точности равно ядру q. Выходит что невырожденность q равносильна тривиальности L, то есть порождению формами v_i всего $(\mathbb{R}^n)^*$.

2. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-1)\dots(n^2-n)}{n^{2n}}.$$

Ответ: $e^{-1/2}$.

Решение. Приведём решение этой задачи в рамках знаний 1-го семестра по матанализу (менее элементарное решение идёт ниже). Заметим, что при $0 < x < 1/2$ имеет место неравенство:

$$e^{-x^2} < (1-x)e^x < 1.$$

Его правая часть является стандартным неравенством $1 - x < e^{-x}$, а левая эквивалентна

$$x^2 + x > \ln \frac{1}{1-x}.$$

В нуле выполняется равенство, значит достаточно доказать неравенство между производными на интересующем нас интервале:

$$2x + 1 > \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow (1-x)(1+2x) > 1 \Leftrightarrow x > 2x^2,$$

что верно при $0 < x < 1/2$.

Перемножив несколько неравенств $e^{-x^2} < (1-x)e^x < 1$ для $x = k/N$, при $1 \le k \le n < N/2$, получаем

$$\exp\left(-\frac{1^2}{N^2} - \frac{2^2}{N^2} - \dots - \frac{n^2}{N^2}\right) <$$
$$< \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)\dots\left(1 - \frac{n}{N}\right)\exp\left(\frac{1}{N} + \frac{2}{N} + \dots + \frac{n}{N}\right) < 1.$$

Применяя формулы для суммы арифметической прогрессии и суммы квадратов натуральных чисел от 1 до n (по краям), получим

$$\exp\left(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6N^2}\right) < \frac{(N-1)(N-2)\dots(N-n)}{N^n}\exp\left(\frac{n(n+1)}{2N}\right) < 1$$

или

$$\exp\left(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6N^2} - \frac{n(n+1)}{2N}\right) < \frac{(N-1)(N-2)\dots(N-n)}{N^n} < \exp\left(-\frac{n(n+1)}{2N}\right).$$

Положим теперь $N = n^2$, получим

$$\exp\left(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} - \frac{n(n+1)}{2n^2}\right) < \frac{(n^2-1)(n^2-2)\dots(n^2-n)}{n^{2n}} < \exp\left(-\frac{n(n+1)}{2n^2}\right),$$

и по теореме о трёх милиционерах предел при $n \to \infty$ оказывается равным $e^{-1/2}$.

Решение через формулу Стирлинга. Заменив выражение на эквивалентное $\frac{(n^2)!}{n^{2n}(n^2-n)!}$ и применив формулу Стирлинга $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, получим, что изучаемое выражение эквивалентно

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2-n}}e^n.$$

Логарифм этого выражения после аккуратного применения формулы Тейлора (при этом легко ошибиться!) даёт в пределе $-1/2$.

3. Существует ли 99 точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, так что среди выбранных из первых 98 точек неупорядоченных троек ровно 1111 троек образуют треугольники, внутренности которых содержат 99-ю точку?

Ответ: нет.

Решение. Посмотрим на чётность количества треугольников (с вершинами из 98 точек, образующих множество S), которые накрывают ещё одну точку p в общем положении с S (общее положение означает, что никакие три точки не лежат на одной прямой). Когда p находится за пределами выпуклой оболочки S, то её никакой треугольник не накрывает, то есть чётность равна 0.

Всякую точку p в общем положении с S можно вывести за пределы выпуклой оболочки S, не задевая точек S. Количество накрывающих точку p треугольников при таком движении будет меняться только при пересечении точкой p некоторого отрезка ab, образованного точками $a, b \in S$, так как чтобы выйти из какого-то треугольника или войти в него, точка p обязана пересечь сторону треугольника.

Посмотрим на пересечение точкой p отрезка ab внимательнее. Прямая ab делит оставшиеся точки S на две части, S' и S''. В сумме в S' и S'' из общего положения находится 96 точек, следовательно мощности $|S'|$ и $|S''|$ имеют одинаковую чётность. При пересечении точкой p отрезка ab точка p теряет накрывающие её треугольники вида abs', $s' \in S'$ и приобретает накрывающие её треугольники вида abs'', $s'' \in S''$. По замечанию о мощности чётность количества накрывающих p треугольников при этом не меняется.

4. Пусть $a_k = 2^{1-k}$. Найдите значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin a_k x}{a_k x}\ dx$$

в зависимости от $n \geq 2$.

Ответ: π (не зависит от n).

Решение. Заметим, что

$$f_k(x) = \frac{\sin a_k x}{a_k x} = \frac{1}{2a_k} \int_{-a_k}^{a_k} e^{ixy}\ dy,$$

то есть функция в левой части этого равенства равна обратному преобразованию Фурье функции g_k — характеристической функции отрезка $[-a_k, a_k]$, умноженной на $\frac{1}{2a_k}$. Здесь мы нормируем прямое преобразование Фурье константой $1/(2\pi)$ а обратное — константой 1.

Тогда произведение $f_1 f_2 \dots f_n$ будет обратным преобразованием Фурье свёртки $g_1 * \dots * g_n$. Интеграл от $f_1 f_2 \dots f_n$, в силу свойств преобразования Фурье, будет равен 2π, умноженному на значение свёртки $g_1 * \dots * g_n$ в нуле. Осталось установить значение этой свёртки в нуле.

Заметим, что при $k = 1$ функция $g_1 * \dots * g_k$ постоянна и равна $1/2$ на отрезке $[-2^{1-k}, 2^{1-k}]$. Покажем, что это утверждение верно для всех k. Действительно, при переходе $k \to k+1$ мы должны свернуть с функцией g_{k+1}, носитель которой содержится в отрезке $[-2^{-k}, 2^k]$. Запишем свёртку по определению

$$(g_1 * \dots g_{k+1})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{k+1}(t)(g_1 * \dots * g_k)(x-t)\ dt = \int_{-2^{-k}}^{2^k} g_{k+1}(t)(g_1 * \dots * g_k)(x-t)\ dt.$$

При $|x| \leq 2^{-k}$ в этом интеграле будет выполняться $|x-t| \leq 2^{1-k}$ и по предположению индукции будет иметь место $(g_1 * \dots * g_k)(x+t) = 1/2$, то есть

$$(g_1 * \dots g_{k+1})(x) = \int_{-2^{-k}}^{2^k} g_{k+1}(t) \frac{1}{2}\ dt = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, значение $g_1 * \dots * g_k$ в нуле при всех k остаётся равным $1/2$ и ответ в задаче — π.

5. Пусть кривая γ, находящаяся на поверхности единичного куба $[-1/2, 1/2]^n$, соединяет некоторые две противоположные точки на поверхности этого куба. Докажите, что её длина не менее 2.

Решение. Замкнём кривую до центрально-симметричной кривой, обозначаем её той же буквой γ и доказываем, что её длина не менее 4. Спроецируем γ на какую-то координатную прямую $0x_i$. Если она не накрывает всю проекцию куба, то значит координата x_i на γ не принимает крайних значений $\pm 1/2$. Тогда γ можно спроецировать на гиперплоскость $x_i = 0$ и её проекция γ' окажется центрально-симметричной кривой на поверхности куба меньшей размерности. Применяя индукцию по размерности (база $n = 2$ очевидна), мы получим утверждение в этом случае.

Если описанная выше индукция не прошла, то получается, что все проекции γ на координатные оси имеют длину не менее 1, а с учётом того, что кривая идёт туда и обратно – то не менее 2.

Разобъём кривую на отрезки какими-то $2n$ точками, на которых координаты x_i достигают наибольшего и наименьшего значения, и далее разобъём её на части, каждая из которой начинается и заканчивается на одной и той же гиперграни куба. Заменим части кривой между этими точками отрезками, модифицированная кривая (ломаная) всё ещё удовлетворяет условию задачи и имеет длину не более исходной, достаточно доказывать утверждение для неё.

Рассмотрим отрезок нашей кривой (ломаной) со смещением $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$. Заметим, что одно из чисел Δx_i равно нулю, так как кривая идёт по границе куба. По неравенству между средним квадратическим и средним арифметическим получаем:

$$\sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}}(|\Delta x_1| + \dots + |\Delta x_n|)$$

Сложив такие неравенства для всех отрезков кривой и используя оценки снизу для длин её проекций на координатные оси, получим

$$\ell(\gamma) \geq \frac{2n}{\sqrt{n-1}} \geq 4,$$

так как $n^2 \geq 4(n-1)$.