

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
12 МАЯ 2019 ГОДА

1. Докажите, что вектор-строки v_1, \dots, v_k длины n порождают всё пространство \mathbb{R}^n тогда и только тогда, когда матрица

$$B = v_1^T v_1 + v_2^T v_2 + \dots + v_k^T v_k$$

невырожденная.

2. Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - 1) \dots (n^2 - n)}{n^{2n}}.$$

3. Существует ли 99 точек плоскости, таких что никакие три из них не лежат на одной прямой, так что среди выбранных из первых 98 точек неупорядоченных троек ровно 1111 троек образуют треугольники, внутренности которых содержат 99-ю точку?

4. Пусть $a_k = 2^{1-k}$. Найдите значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{k=1}^n \frac{\sin a_k x}{a_k x} dx$$

в зависимости от $n \geq 2$.

5. Пусть кривая γ , находящаяся на поверхности единичного куба $[-1/2, 1/2]^n$, соединяет некоторые две противоположные точки на поверхности этого куба. Докажите, что её длина не менее 2.