СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
14 МАЯ 2017 ГОДА

1. Пусть смешанное произведение трёх векторов $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ по модулю не менее 1. Докажите, что векторное произведение какой-то пары из этих векторов по модулю не менее 1.

Решение. С помощью равенства «бац минус цаб» можно найти

$$
\begin{aligned}
&([a\times b],[[b\times c]\times[c\times a]]) = \\
&\qquad = ([a\times b], c(a,[b\times c]) - a(a,[b\times c])) = \\
&\qquad\qquad = ([a\times b], c)(a,[b\times c]) = (a,b,c)^2.
\end{aligned}
$$

То есть смешанное произведение трёх векторных произведений тоже по модулю не менее 1, а значит и хотя бы одно векторное произведение по модулю не менее 1.

2. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}}}.$$

Количество радикалов равно n, первый знак минус, потом плюсы.

Ответ: π.

Решение. Пусть $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Непосредственная индукция показывает, что $a_n = 2\cos(\pi/2^n)$. Выражение под пределом равно $2^n\sqrt{2-a_n} = 2^{n+1}\sin(\pi/2^{n+1}) \to \pi$ при $n\to\infty$.

См. также [П. Ромер. «Новое выраженіе для π». *Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики* 97 (1890), 2–4.]

3. Докажите, что матрица $n\times n$ с элементами

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (ij)^k$$

невырожденна.

Решение. Рассмотрим векторы $w_i = (i, i^2, \dots, i^n)$ при $i = 1,\dots,n$. Детерминант, составленный из этих векторов, является определителем Вандермонда чисел $(1,2,\dots,n)$, умноженным на $n!$, и не равен нулю. Указанная в задаче матрицы является матрицей Грама этой системы векторов и поэтому её детерминант положителен.

4. Пусть K — компактное подмножество евклидова пространства, а $f: K\to K$ — отображение, такое что $|f(x)-f(y)| \ge |x-y|$ для любых $x, y\in K$. Докажите, что любая точка $x\in K$ является предельной точкой последовательности $(f^n(x))_n$, где

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(}_{n} x)\dots).$$

Решение. Множество K компактно, поэтому у последовательности $(f^k(x))$ должен быть какой-то частичный предел. Выделим в ней сходящуюся подпоследовательность $(f^{k_n}(x))$, она будет фундаментальной. Значит $|f^{k_{2n}}(x) - f^{k_n}(x)| \to 0$ при $n \to \infty$. Но так как f не уменьшает расстояния, то получается

$$|f^{k_{2n}}(x) - f^{k_n}(x)| \geq |f^{k_{2n}-k_n}(x) - x| \to 0,$$

то есть $f^{k_{2n}-k_n}(x) \to x$, тогда как $k_{2n} - k_n \to \infty$.

Замечание. Применив доказанное к отображению $f \times f : K \times K \to K \times K$, можно вывести, что f на самом деле сохраняет расстояние, то есть является изометрией.

5. В Средиземном море есть четыре острова α, β, γ и δ, на которых живут математики А, В, Г и Δ. Как-то утром, они решили, что каждый обойдёт свой остров один раз против часовой стрелки, причём так, что всё время их положения будут образовывать квадрат АВГΔ. Удивительно, но им это удалось. Найдите площадь острова δ, если известны площади островов α, β и γ.

Ответ: $\Sigma_\delta = \Sigma_\alpha - \Sigma_\beta + \Sigma_\gamma$.

Решение. Пусть центр квадрата двигался по замкнутой кривой $z(t) \in \mathbb{C}$, а вектор из центра до А менялся как $v(t) \in \mathbb{C}$, тогда траектории четырёх математиков описывались выражениями

$$z(t) + i^k v(t),$$

где $i = 0, 1, 2, 3$. Площади островов по формуле Грина пропорциональны выражениям

$$\Sigma_k \sim \int \overline{(z + i^k v)} d(z + i^k v) = \int \bar{z}dz + i^k \bar{z}dv + i^{-k}\bar{v}dz + \bar{v}dv.$$

Мы хотим доказать, что сумма $\Sigma_0 - \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3$ равна нулю, считаем:

$$\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\Sigma_k = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k \int \bar{z}dz + i^k\bar{z}dv + i^{-k}\bar{v}dz + \bar{v}dv =$$

$$= \int \left(\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\bar{z}dz + \sum_{k=0}^{3}(-i)^k\bar{z}dv + \sum_{k=0}^{3} i^k\bar{v}dz + \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\bar{v}dv \right) = 0.$$