СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
22 МАЯ 2016 ГОДА

1. Функция $f(x, y)$, непрерывная на $[0,1] \times [0,1]$, обладает таким свойством: при всяком фиксированном x минимум $f(x, y)$ достигается ровно в одной точке $y = g(x)$. Докажите, что полученная так функция $g(x)$ непрерывна.

Решение. Предположим противное: при некотором $x_0 \in [0,1]$ оказалось, что предел g в точке x_0 не равен $g(x_0)$. Используя определение предела по Гейне, находим, что для некоторой последовательности $x_k \to x_0$ последовательность $g(x_k)$ не стремится к $g(x_0)$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $g(x_k) \to z \neq g(x_0)$. Положим для краткости $y_k = g(x_k)$ и $y_0 = g(x_0)$. Из условия мы заключаем, что существует положительное ε, для которого $f(x_0, y_0) + \varepsilon < f(x_0, z)$. Тогда при достаточно большом k будет выполнено

$$f(x_k, y_0) + \varepsilon < f(x_k, y_k)$$

из непрерывности. Это означает, что при фиксированном $x = x_k$ минимум $f(x_k, y)$ по y находится не в точке y_k — противоречие.

2. Найдите объём множества тех точек $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n-мерного куба $[0,1]^n$, для которых любые две из координат отличаются более чем на d, где $d > 0$.

Ответ: $(1 - (n-1)d)^n$, если $(n-1)d \leq 1$ и 0, если $(n-1)d \geq 1$.

Решение. Ясно, что при $(n-1)d > 1$ таких точек в кубе нет вообще, поэтому далее считаем $(n-1)d \leq 1$. Разобьём куб $Q = [0,1]^n$ на пирамидки (по научному — симплексы)

$$T_\sigma = \{0 \leq x_{\sigma(1)} \leq \dots \leq x_{\sigma(n)} \leq 1\},$$

нумеруемые $n!$ перестановками $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$.

Обозначим наше множество через X. Достаточно доказать, что из $n!$ пересечений $X \cap T_\sigma$ (они, кстати, тоже являются пирамидками) можно составить куб с ребром $1 - (n-1)d$ с точностью до множеств нулевого объёма.

Для любой точки $(x_1, \dots, x_n) \in X$ переставим её координаты по возрастанию. Получим $(y_1, \dots, y_n)$, где

$$0 \leq y_1 < y_1 + d \leq y_2 < y_2 + d \leq y_3 < \dots < y_{n-1} + d \leq y_n \leq 1.$$

Обозначим через $f(x_1, \dots, x_n)$ точку, полученную из сдвинутых координат

$$(y_1, y_2 - d, \dots, y_n - (n-1)d)$$

обратной перестановкой. Тогда f инъективно и кусочно-изометрично отображает X в множество точек уменьшенного куба $[0, 1 - (n-1)d]^n$, причём получатся все точки с попарно различными координатами. Это доказывает равенство объёма X и уменьшенного куба, так как точки с совпадениями координат образует множество нулевой меры.

3. Пусть n — нечётное число, а $A = (a_{ij})$ — матрица $n \times n$, у которой a_{ij} зависит только от разности $i - j$ по модулю n и сумма в первой строке неотрицательна. Докажите, что $\det A \geq 0$.

Решение. Пусть $(c_0, \ldots, c_{n-1})$ — первая строка матрицы A. Остальные получаются из неё циклическими сдвигами. Обозначим $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Заметим, что векторы

$$(1, w^j, w^{2j}, \ldots, w^{(n-1)j}) \quad j = 0, \ldots, n-1$$

являются собственными для оператора A. Они образуют базис $\mathbb{C}^n$, так как соответствующий определитель равен определителю Вандермонда

$$\prod_{0 \leq j < k < n} (w^k - w^j) \neq 0.$$

Нетрудно посчитать, что соответствующие этим векторам собственные значения:

$$\lambda_j = c_0 + w^j c_1 + \cdots + w^{(n-1)j} c_{n-1}.$$

По условию $\lambda_0 \geq 0$, а остальные собственные значения разбиваются на пары комплексно сопряжённых $\bar{\lambda_j} = \lambda_{n-j}$. Следовательно

$$\det A = \lambda_0 |\lambda_1|^2 \ldots |\lambda_{\frac{n-1}{2}}|^2 \geq 0.$$

4. Пусть решётка $\mathbb{Z}^2$ разбита на подмножества $E_1, \ldots, E_m$. При этом для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ существует вектор v_i такой, что $E_i + v_i = E_i$, и векторы v_i попарно неколлинеарны. Докажите, что найдётся вектор u, не коллинеарный v_1 и такой, что $E_1 + u = E_1$.

Решение. Вместо «точка принадлежит E_i» будем говорить «точка покрашена в цвет i». Можно сделать сохраняющую решётку замену координат так, что $v_1 = (N, 0)$. Действительно, минимальный по длине вектор решётки из параллельных v_1 и не равных нулю можно взять за первый вектор нового базиса; а в качестве второго вектора нового базиса решётки можно выбрать один из ближайших к прямой $\langle v_1 \rangle$ векторов решётки.

После ориентации v_1 вдоль оси $0x$ заметим, что векторы

$$w_2 = N v_2 - v_{2x} v_1, \quad \ldots \quad, w_m = N v_m - v_{mx} v_1$$

ненулевые, направлены вдоль оси $0y$ и обладают таким свойством: w_i переводит точки цвета $i \geq 2$ не в первый цвет. Так как все векторы $w_2, \ldots, w_m$ вертикальны, то существует их наименьшее общее кратное u. Так как для любого $i \geq 2$ вектор u является целочисленной комбинацией v_i и v_1, то точку цвета $i \geq 2$ он не может перевести в точку цвета 1. Аналогично, $-u$ не может перевести точку цвета $i \geq 2$ в точку цвета 1. Следовательно, u переводит точку цвета 1 в точку цвета 1 и очевидно не является горизонтальным, то есть не коллинеарен v_1.

5. Существует ли ненулевая бесконечно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что для всякого многочлена p интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x) \, dx$$

сходится и равен нулю?

Ответ: да.

Решение. Пусть g — ненулевая чётная финитная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой не содержит точки 0. Возьмём в качестве f её преобразование Фурье, оно будет принимать действительные значения из-за чётности g и будет убывать быстрее любой степени x. Тогда при всех целых $k \geq 0$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx$$

с точностью до константы равен k-й производной g в нуле — то есть равен нулю.