СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
22 МАЯ 2016 ГОДА

1. Функция $f(x, y)$, непрерывная на $[0,1] \times [0,1]$, обладает таким свойством: при всяком фиксированном x минимум $f(x, y)$ достигается ровно в одной точке $y = g(x)$. Докажите, что полученная так функция $g(x)$ непрерывна.

2. Найдите объём множества тех точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-мерного куба $[0,1]^n$, для которых любые две из координат отличаются более чем на d, где $d > 0$.

3. Пусть n — нечётное число, а $A = (a_{ij})$ — матрица $n \times n$, у которой a_{ij} зависит только от разности $i - j$ по модулю n и сумма в первой строке неотрицательна. Докажите, что $\det A \geq 0$.

4. Пусть решётка $\mathbb{Z}^2$ разбита на подмножества $E_1, \ldots, E_m$. При этом для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ существует вектор v_i такой, что $E_i + v_i = E_i$, и векторы v_i попарно неколлинеарны. Докажите, что найдётся вектор u, не коллинеарный v_1 и такой, что $E_1 + u = E_1$.

5. Существует ли ненулевая бесконечно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что для всякого многочлена p интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f(x)\, dx$$

сходится и равен нулю?