

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
24 МАЯ 2015

1. Пусть E — единичная матрица, а A — произвольная матрица того же размера. Найдите предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(E + tA) - 1}{t}.$$

2. Пусть сечение конуса $x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geq 0$) плоскостью является эллипсом. Докажите, что у проекции этого эллипса на плоскость Oxy начало координат является фокусом.
3. Дан многочлен степени d от n переменных. Докажите, что либо он принимает ненулевые значения как минимум в 2^{n-d} вершинах куба $\{-1, 1\}^n$, либо он принимает только нулевые значения в вершинах этого куба.
4. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая бесконечно дифференцируемая функция. Положим

$$m_n = \left(\int_0^{2\pi} |f^{(n)}(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Докажите, что последовательность $(m_n^{1/n})$ имеет конечный или бесконечный предел.

5. Дана последовательность a_0, a_1, a_2, \dots и натуральное число $d \geq 2$. Известно, что

$$a_0 = a_1 = \dots = a_d = 1,$$

и при $k \geq d$

$$a_{k+1} \geq a_k - \frac{a_{k-d}}{4d}.$$

Докажите, что все числа a_k положительные.