СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

08 ДЕКАБРЯ 2013

1 КУРС

1. При каких $n \geq 3$ можно утверждать, что для всякой пирамиды с выпуклым n-угольником в основании и всякой точки X внутри неё сумма расстояний от X до вершин пирамиды меньше суммы длин рёбер пирамиды?

2. Каждые два из $n \geq 4$ городов соединены дорогой с односторонним движением. Известно, что из любого города в любой другой можно добраться. Найдите наименьшее k такое, что для любых трёх городов A, B, C можно добраться из A в B, а затем из B в C, проехав не более, чем по k дорогам (если по дороге проехали два раза, она считается дважды).

3. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$
Докажите, что существует $x_0 \in \mathbb{R}$, такое что $f(x_0) = 0$.

4. Пусть дана последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ и оказалось, что последовательность $\{3x_{n+1} - 2x_n\}$ сходится. Докажите, что $\{x_n\}$ тоже сходится.

5. Даны две различные последовательности из нулей и единиц длины n. Докажите, что найдутся натуральное число $m \leq 5\sqrt{n}$ и остаток a по модулю m такие, что последовательности отличаются по количеству единиц, стоящих на местах, номера которых сравнимы с a по модулю m.

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ

08 ДЕКАБРЯ 2013

2–6 КУРС

1. В ортогональной матрице A выбрали две взаимно дополнительных квадратных подматрицы B и C (т.е. сумма размеров матриц B и C равна размеру матрицы A, и каждая строка и каждый столбец A содержит либо элементы B, либо элементы C). Докажите, что $\det B = 0$ тогда и только тогда, когда $\det C = 0$.

2. Пусть дана последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ и оказалось, что последовательность $\{3x_{n+1} - 2x_n\}$ сходится. Докажите, что $\{x_n\}$ тоже сходится.

3. Будем рассматривать единичные кубы в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными осям координат, и называть их просто «кубы». Пусть выбраны $2^{n-1}+1$ попарно непересекающихся кубов. Докажите, что либо не существует куба, пересекающегося с каждым из выбранных, либо все кубы, пересекающиеся с каждым из выбранных, имеют общую точку.

4. Докажите, что при всяком $p > 1, p \neq 2$ кривая $|x|^p + |y|^p = 1$ имеет с любым эллипсом с центром в начале координат не более 8 общих точек.

5. Даны две различные последовательности из нулей и единиц длины n. Докажите, что найдутся натуральное число $m \leq 5\sqrt{n}$ и остаток a по модулю m такие, что последовательности отличаются по количеству единиц, стоящих на местах, номера которых сравнимы с a по модулю m.